

# A Agulha de Buffon

Páginas 10-11 do livro Probabilidade (2026)  
Leonardo Rolla e Bernardo Lima, Projeto Euclides.

## A agulha de Buffon

Uma agulha é lançada de modo aleatório para cima e cai sobre um piso que é cortado por um feixe de retas paralelas, todas elas espaçadas por uma mesma distância igual ao comprimento da agulha. Qual a probabilidade de a agulha cruzar uma das retas do piso?

Seja  $\ell$  o comprimento da agulha. Inspeccionando a Figura 1.3, podemos verificar que a agulha está perfeitamente localizada em relação às retas do piso se conhecermos as variáveis

$\theta =$  menor ângulo formado entre a agulha e as retas do piso

e

$x =$  distância entre o ponto médio da agulha e a reta mais próxima.

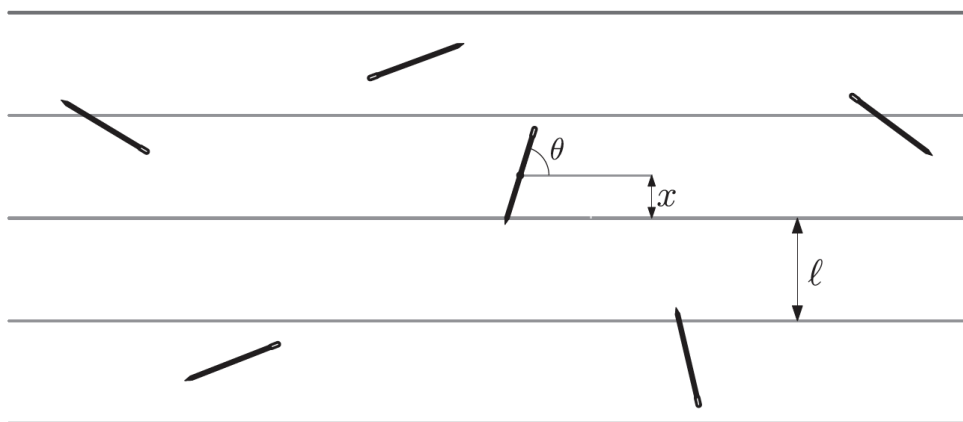


Figura 1.3: Piso indicando várias agulhas de Buffon e as coordenadas  $\theta$  e  $x$ .

## 1.1. alguns modelos probabilísticos

11

Observe que  $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , ou seja, o lançamento da agulha corresponde a um sorteio de um ponto no retângulo  $\Omega = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\ell}{2}]$ . Recorrendo novamente à Figura 1.3, podemos verificar que a agulha cruza uma das retas do piso se, e somente se, é satisfeita a condição  $x < \frac{\ell}{2} \sin \theta$ . Sendo assim, nossa pergunta agora é quanto vale  $\mathbb{P}(A)$ , onde  $A = \{(\theta, x) \in \Omega : x < \frac{\ell}{2} \sin \theta\}$ . Assim como agimos intuitivamente no Exemplo 1.3, por uma questão de simetria (invariância por rotação e translação), a probabilidade do conjunto  $A$  deve ser a razão entre as áreas dos conjuntos  $A$  e  $\Omega$ :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } \Omega} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} \sin \theta \, d\theta}{\frac{\ell\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}.$$

Lançando a agulha muitas vezes, esperamos que a proporção de lançamentos em que a agulha intersecta as linhas do piso se aproxime de  $\frac{2}{\pi}$ . Este é, pois, um método probabilístico para calcular as casas decimais de  $\pi$ ! Na verdade, não é um método muito eficiente, mas impressiona pela audácia.