O problema dos testes falsos positivos

A interpretação mais popular da probabilidade de um evento incerto tem a ver com a frequência com que esse evento ocorre quando o experimento é repetido muitas vezes. Por exemplo, quando lançamos uma moeda normal um número N grande de vezes, sai cara (aproximadamente) $N/2$ vezes. Então, a probabilidade do evento "cara" é ½. Mas essa interpretação, chamada frequentista, tem problemas. Para começar, porque pressupõe que o experimento pode ser repetido. A Copa do Mundo no Qatar vai acontecer uma vez só, evidentemente: isso quer dizer que não faz sentido falar na probabilidade de o Brasil ganhar essa Copa?

A resposta mais usual a esse problema, chamada interpretação bayesiana, é que a probabilidade nada mais é do que uma quantificação da nossa expectativa de que o evento ocorra. Seria um conceito subjetivo, sujeito a atualização a cada vez que fique disponível uma nova informação que altere essa expectativa. Vejamos um exemplo simples.

Os times de futebol Alguidares e Bem-Bom se encontram regularmente para um clássico regional. Das 10 partidas que já jogaram, Alguidares ganhou 3 e Bem-Bom, 7. Assim, de início, o time do Bem-Bom é o favorito para a próxima partida: expectativa $7/10$ de que vença. Mas é sabido que choveu em 4 partidas anteriores, e que o Alguidares ganhou 3 delas: parece que debaixo de água eles levam vantagem. E acabamos de saber que vai chover durante o próximo jogo. Agora, como ficam as chances de que o Bem-Bom vença?

A denominação "bayesiana" homenageia o matemático e pastor presbiteriano inglês Thomas Bayes (1701-61), mas não é claro se ele pensava realmente desse modo. Bayes interessou-se pelos grandes problemas intelectuais de seu tempo, mas, em vida, publicou apenas *Divina benevolência*, estudo religioso que argumenta que o objetivo da divindade é a felicidade de suas criaturas, e *Introdução à doutrina das fluxões*, uma defesa veemente das ideias de Isaac Newton (1643-1727). Em probabilidade ele só trabalhou nos últimos anos, e suas notas, intituladas *Ensaio para resolver um problema na doutrina das chances*, só foram publicadas dois anos após sua morte. Esse trabalho contém um importante teorema, que hoje em dia é ensinado em todo curso introdutório de probabilidade ou estatística.

O francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), verdadeiro criador da interpretação bayesiana, utilizou o teorema de Bayes para desenvolver as próprias ideias sobre probabilidade, atribuindo o crédito ao colega mais velho.

Em teoria da probabilidade, é usual buscar informações sobre os efeitos a partir das causas. Por exemplo, se sabemos que uma caixa contém B bolas brancas e P bolas pretas, a probabilidade de que uma bola retirada ao acaso seja preta é $P/(B+P)$. O problema a que faz menção o título do *Ensaio* é o da probabilidade inversa: buscar informações sobre as causas a partir dos efeitos.* Se não conhecemos os números B e P, o que podemos inferir sobre eles com base na retirada de algumas bolas da caixa?

O teorema de Bayes explica como responder a esse tipo de pergunta e, ao mesmo tempo, como atualizar a estimativa da probabilidade de um evento aleatório a partir de uma nova informação. Por exemplo, o teorema diz que, levando em conta a informação de que vai chover durante o jogo entre o Alguidares e o Bem-Bom, a probabilidade de que o Bem-Bom ganhe é igual à probabilidade de chuva quando o Bem-Bom ganha ($1/7$) vezes a chance a priori de vitória do Bem-Bom ($7/10$), dividida pela probabilidade de chover ($4/10$). Assim, as chances do Bem-Bom não passam de $1/4$.

Uma aplicação da probabilidade bayesiana é na análise e interpretação dos resultados de testes clínicos. Considere o seguinte exemplo ilustrativo.

As autoridades estão preocupadas com uma doença que afeta a população. A enfermidade é grave, mas pode ser tratada se for detectada no início. Seria natural testar logo todo mundo, mas testes não são infalíveis: a chance de um doente apresentar teste negativo é de 2%, e a chance de alguém saudável ter um resultado positivo no teste é de 3%. Falsos positivos são especialmente problemáticos: além de trazerem à pessoa a angústia de achar que corre risco de vida, ainda apontam para um tratamento caro, desconfortável e, no caso, desnecessário. Mas as chances de erro parecem bem pequenas. Será que não vale a pena correr o risco assim mesmo?

Uma questão central é a seguinte: quando o resultado é positivo, qual é a chance de que a pessoa esteja saudável e, portanto, o tratamento não se justifique?

Estima-se que 1% da população esteja infectada: essa é a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso esteja doente. Escrevemos isso numa forma simplificada: P(doente) = 1%, logo P(saudável) = 99%. Queremos saber qual é a probabilidade P(saudável se positivo) de que a pessoa esteja bem,

---

* A expressão "probabilidade inversa" foi usada pela primeira vez em 1837, pelo também britânico Augustus De Morgan (1806-71).

sabendo que ela testou positivo. O teorema de Bayes explica como calcular, e o resultado pode surpreender.

O primeiro passo é calcular P(saudável) vezes P(positivo se saudável). Como P(saudável) é 99% e a chance de falsos positivos é 3%, isso dá 99% vezes 3%, que é 2,97%. O segundo passo é fazer a mesma conta para pessoas doentes, ou seja, P(doente) vezes P(positivo se doente). Como P(doente) é 1% e a chance de falsos negativos é 2%, este cálculo dá 1% vezes 98%, ou seja, 0,98%.

O último passo é dividir o primeiro desses dois números pela soma de ambos, ou seja, P(saudável se positivo) é igual a 2,97% dividido por 2,97% + 0,98%. O resultado é 75,2%. Logo, nesse caso a grande maioria dos resultados positivos — mais de ¾ — são falsos positivos! Isso aconselha muita prudência antes de sair tratando todo mundo que testou positivo...

As aplicações práticas da probabilidade inversa estão por toda parte, e o teorema de Bayes é ferramenta fundamental. Ele também se mostrou particularmente adequado no desenho de métodos de aprendizagem de máquina, o que assegura à probabilidade bayesiana uma posição de destaque no âmbito da inteligência artificial.