

Modelo Linear Geral V

Aula 08

Wooldridge, 2011 (4. ed) – Seção 6.2

Interação

Modelos com Interação

Algumas vezes é natural que o efeito parcial, a elasticidade ou a semi-elasticidade da variável dependente, com relação à independente, dependa da magnitude de alguma outra variável explicativa.

Tal dependência pode ser medida ao estimarmos, por exemplo, o seguinte modelo

$$y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_2 x_3 + \varepsilon.$$

Modelos com Interação

Assim, o efeito parcial da variável explicativa x_2 em y (mantendo x_3 fixada) é dado por

$$\frac{\partial E(y | x_2, x_3)}{\partial x_2} = \beta_2 + \beta_4 x_3$$

Já o efeito parcial da variável explicativa x_3 em y (mantendo x_2 fixada) é dado por

$$\frac{\partial E(y | x_2, x_3)}{\partial x_3} = \beta_3 + \beta_4 x_2$$

Exemplo

Um corretor de imóveis tem interesse em estimar os parâmetros da seguinte equação de regressão:

$$\begin{aligned} \text{preço} = & \beta_1 + \beta_2 \text{areaconstr} + \beta_3 \text{numdorm} + \\ & + \beta_4 \text{areaconstr} \cdot \text{numdorm} + \beta_5 \text{numvagas} + \varepsilon \end{aligned}$$

em que

preço – preço do imóvel, em milhares de reais;

areaconstr – área construída, em m²;

numdorm – número de dormitórios;

numvagas – número de vagas na garagem.

Exemplo (cont.)

Da equação anterior, o efeito parcial de *numdorm* sobre o preço (fixadas as demais variáveis) é dado por

$$\frac{\partial E(\text{preço} | \text{areaconstr}, \text{numdorm}, \text{numvagas})}{\partial \text{numdorm}} = \beta_3 + \beta_4 \text{areaconstr}$$

ou seja, o impacto de um quarto a mais no preço dos imóveis depende da área construída.

Por exemplo, se $\beta_4 > 0$, então um quarto a mais produz um aumento maior no preço médio dos imóveis maiores.

Aplicação

Arquivo: *Tyler.wf1*

Produto: Shampoo

Objetivo

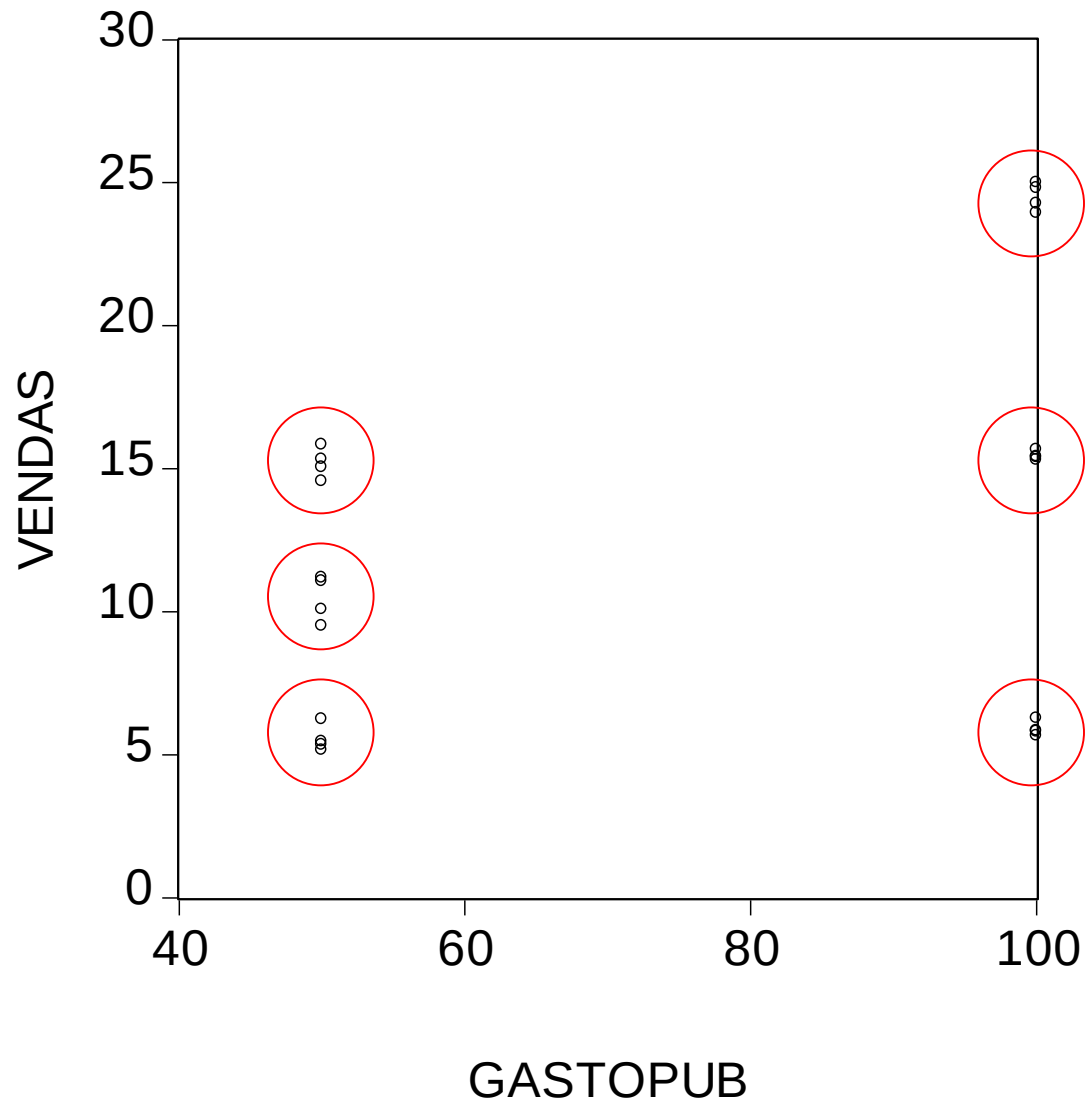
Verificar como o preço (em dólares) e os gastos com publicidade (em milhares de dólares) influenciam as vendas do produto (em milhares de unidades).

Arquivo: *Tyler.wf1*
Produto: Shampoo

em que

- **preço = 1, 2 ou 3 dólares**
- **gastos com publicidade**
(GASTOPUB) = 50 ou 100 mil dólares
- **vendas do produto**
(em milhares de unidades).

Vendas vs Gastopub



Regressão Simples

Dependent Variable: VENDAS

Method: Least Squares

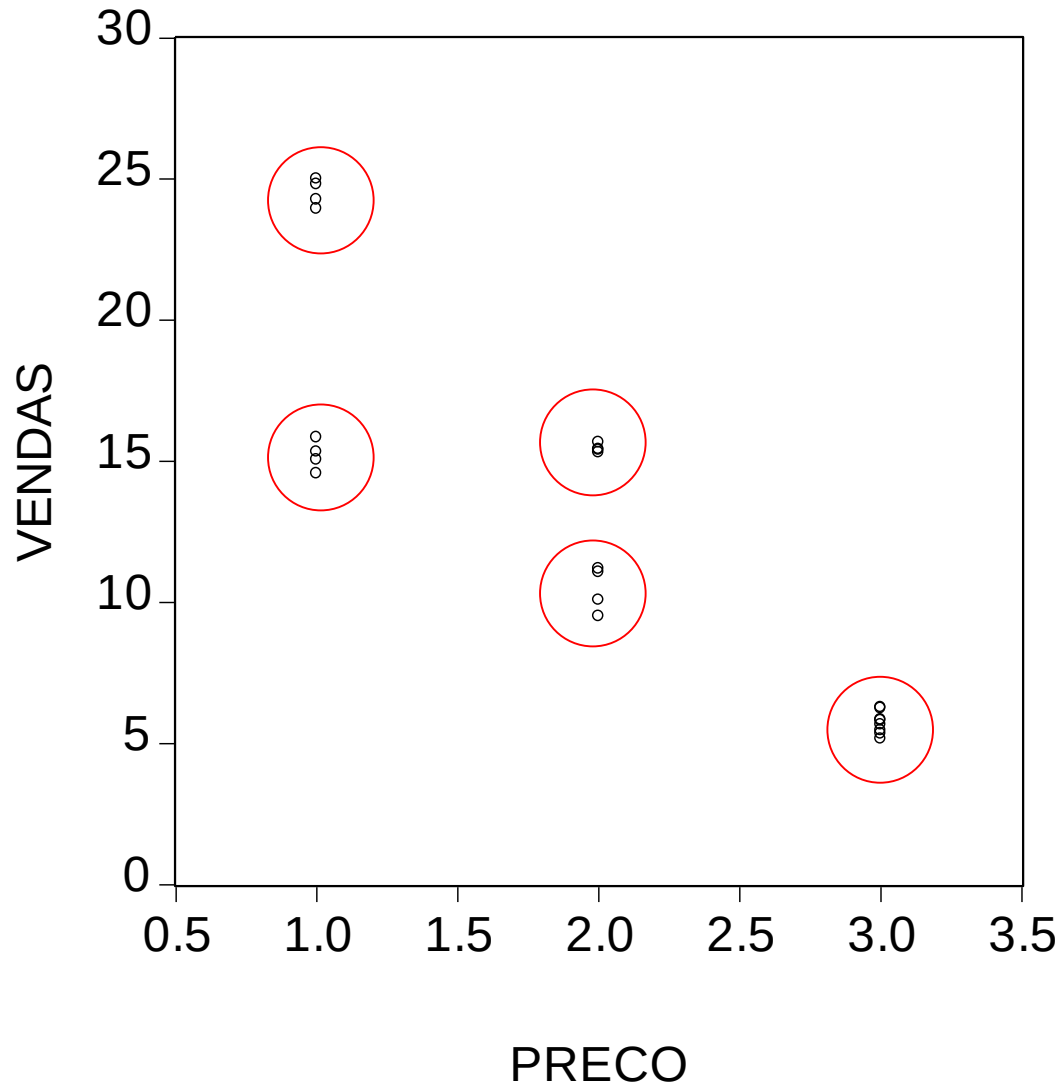
Date: 09/08/99 Time: 15:22

Sample: 1 24

Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.522167	4.090782	1.349905	0.1908
GASTOPUB	0.097628	0.051745	1.886729	0.0725
R-squared	0.139272	Mean dependent var	12.84429	
Adjusted R-squared	0.100148	S.D. dependent var	6.680767	
S.E. of regression	6.337413	Akaike info criterion	6.610473	
Sum squared resid	883.5816	Schwarz criterion	6.708645	
Log likelihood	-77.32568	F-statistic	3.559746	
Durbin-Watson stat	0.466050	Prob(F-statistic)	0.072464	

Vendas vs Preço



Regressão Simples

Dependent Variable: VENDAS

Method: Least Squares

Date: 09/08/99 Time: 15:25

Sample: 1 24

Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	26.97154	1.739492	15.50541	0.0000
PRECO	-7.063625	0.805228	-8.772202	0.0000
R-squared	0.777669	Mean dependent var	12.84429	
Adjusted R-squared	0.767563	S.D. dependent var	6.680767	
S.E. of regression	3.220913	Akaike info criterion	5.256862	
Sum squared resid	228.2342	Schwarz criterion	5.355033	
Log likelihood	-61.08234	F-statistic	76.95153	
Durbin-Watson stat	0.248100	Prob(F-statistic)	0.000000	

Regressão Múltipla

Dependent Variable: VENDAS

Method: Least Squares

Date: 09/08/99 Time: 15:26

Sample: 1 24

Included observations: 24

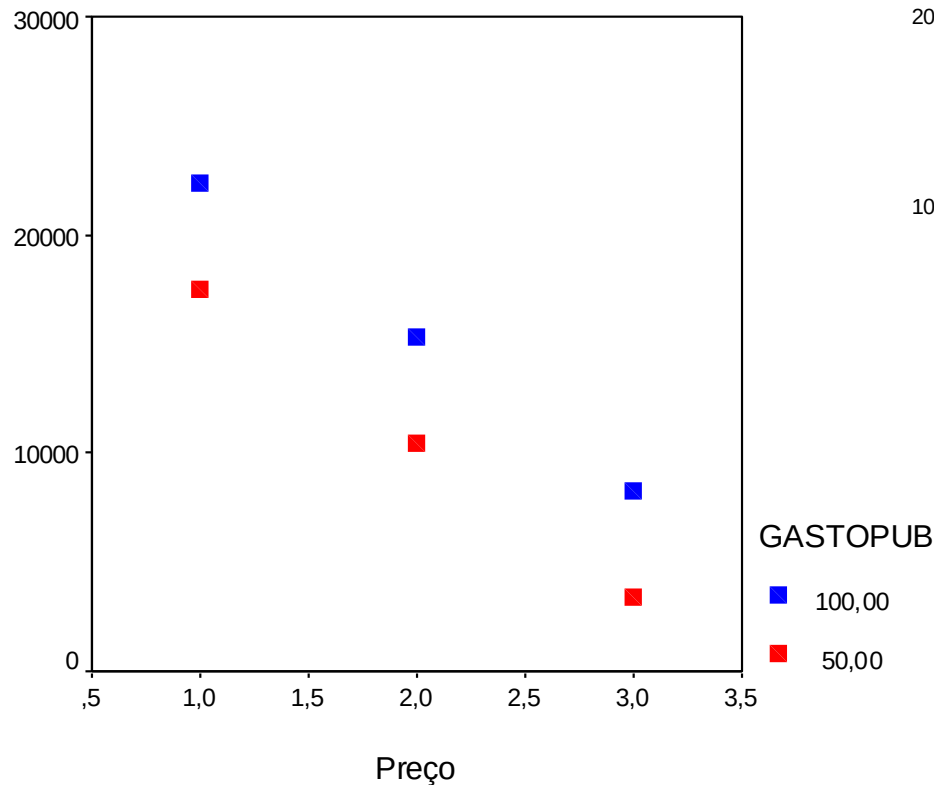
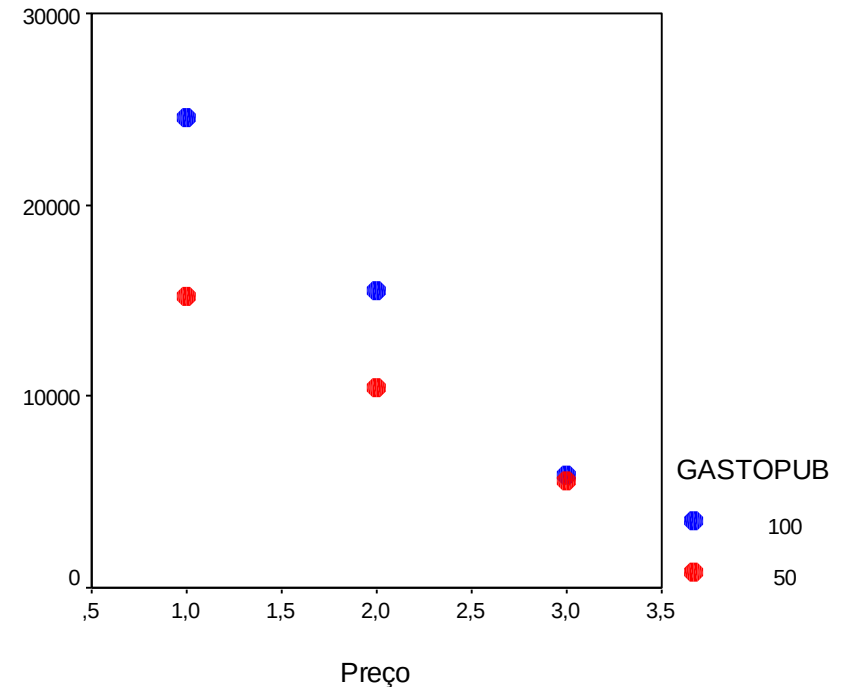
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	19.64942	1.645241	11.94318	0.0000
GASTOPUB	0.097628	0.016452	5.933983	0.0000
PRECO	-7.063625	0.503750	-14.02208	0.0000
R-squared	0.916941	Mean dependent var	12.84429	
Adjusted R-squared	0.909030	S.D. dependent var	6.680767	
S.E. of regression	2.015001	Akaike info criterion	4.355585	
Sum squared resid	85.26479	Schwarz criterion	4.502842	
Log likelihood	-49.26702	F-statistic	115.9154	
Durbin-Watson stat	0.371668	Prob(F-statistic)	0.000000	

Médias observadas e previstas pelo modelo

Preço	Gastopub	Média	
		Observadas	Previstas
1	50	15.192,85	17.467,23
2	50	10.464,22	10.403,51
3	50	5.553,46	3.339,79
1	100	24.510,50	22.348,78
2	100	15.449,68	15.285,06
3	100	5.895,02	8.221,34

Graf 1: Vendas médias observadas vs preço e gastopub

Graf 2: Vendas médias previstas pelo modelo vs preço e gastopub



Conclusões

Modelo utilizado:

$$y = \beta_1 + \beta_2 \text{ Preço} + \beta_3 \text{ Gastopub} + \varepsilon$$

Fixado o gasto em publicidade:

$$\text{Gasto} = 50: y = (\beta_1 + 50 \beta_3) + \beta_2 \text{ Preço} + \varepsilon$$

$$\text{Gasto} = 100: y = (\beta_1 + 100 \beta_3) + \beta_2 \text{ Preço} + \varepsilon$$

Retas paralelas – o que não está de acordo com o gráfico das médias observadas do slide anterior.

Conclusões

Fixado o gasto em publicidade:

$$\text{Gasto} = 50: y = (\beta_1 + 50 \beta_3) + \beta_2 \text{Preço} + \varepsilon$$

$$\text{Gasto} = 100: y = (\beta_1 + 100 \beta_3) + \beta_2 \text{Preço} + \varepsilon$$

De acordo com o modelo: a **forma** como as vendas dependem do preço não depende do gasto (retas paralelas).

Pelo Graf. 1 vemos que isso não é razoável. A **forma** dessa dependência se altera conforme o gasto com publicidade. Dizemos que há interação entre preço e gasto com publicidade.

Modelo com interação

$$y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_2 x_3 + \varepsilon$$

y: Vendas

x_2 : Preço

x_3 : Gasto com publicidade

Modelo estimado com interação

Dependent Variable: VENDAS

Method: Least Squares

Date: 09/08/99 Time: 15:34

Sample: 1 24

Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.184667	0.826774	7.480477	0.0000
PRECO	-0.331250	0.382722	-0.865510	0.3970
GASTOPUB	0.277158	0.010458	26.50214	0.0000
PRECO*GASTOPUB	-0.089765	0.004841	-18.54229	0.0000
R-squared	0.995434	Mean dependent var	12.84429	
Adjusted R-squared	0.994749	S.D. dependent var	6.680767	
S.E. of regression	0.484110	Akaike info criterion	1.538001	
Sum squared resid	4.687240	Schwarz criterion	1.734343	
Log likelihood	-14.45601	F-statistic	1453.398	
Durbin-Watson stat	1.740766	Prob(F-statistic)	0.000000	

Médias observadas e previstas pelos modelos (sem e com interação)

Preço	Gastopub	Observadas	Média	
			Previstas (sem interação)	Previstas (com interação)
1	50	15.192,85	17.467,23	15.223,08
2	50	10.464,22	10.403,51	10.403,58
3	50	5.553,46	3.339,79	5.584,08
1	100	24.510,50	22.348,78	24.592,75
2	100	15.449,68	15.285,06	15.285,06
3	100	5.895,02	8.221,34	5.997,25

Função Quadrática

Modelos com Função Quadrática

As funções quadráticas podem ser utilizadas em economia aplicada para, por exemplo, capturar efeitos marginais crescentes ou decrescentes.

Assim, considere o modelo

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \varepsilon$$

Interpretação

$$\frac{\partial E(y | x)}{\partial x} = \beta_2 + 2\beta_3 x$$

(efeito parcial de x depende da magnitude de x)

Neste caso, efeito será crescente se $\beta_3 > 0$ e decrescente se $\beta_3 < 0$.

Modelos com Função Quadrática

Ainda, muitas vezes na prática, pode ser importante conhecer o valor a partir do qual há uma mudança no efeito de x em y .

Voltando ao modelo

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \varepsilon$$

O ponto de mudança (ou máximo ou mínimo da função) vale

$$x^* = \left| \frac{\beta_2}{2\beta_3} \right|$$

Exemplo

Um analista tem interesse em estimar os parâmetros da seguinte equação de regressão:

$$wage = \beta_1 + \beta_2 \text{exper} + \beta_3 \text{exper}^2 + \varepsilon$$

em que

wage – salário-hora, em dólares;

exper – tempo de experiência, em anos.

Usando o quadro disponibilizado no *slide* a seguir, escreva os resultados obtidos na forma usual e interprete as estimativas dos parâmetros. Ainda, qual o impacto esperado no salário-hora para o primeiro ano de experiência? E para o segundo ano de experiência?

Exemplo (cont.)

Dependent Variable: WAGE

Method: Least Squares

Date: 10/07/11 Time: 11:04

Sample: 1 526

Included observations: 526

WAGE=C(1)+C(2)*EXPER+C(3)*EXPER^2

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	3.725406	0.345939	10.76896	0.0000
C(2)	0.298100	0.040966	7.276850	0.0000
C(3)	-0.006130	0.000903	-6.791991	0.0000
R-squared	0.092769	Mean dependent var	5.896103	
Adjusted R-squared	0.089300	S.D. dependent var	3.693086	
S.E. of regression	3.524334	Akaike info criterion	5.362947	
Sum squared resid	6496.147	Schwarz criterion	5.387274	
Log likelihood	-1407.455	Hannan-Quinn criter.	5.372472	
F-statistic	26.73982	Durbin-Watson stat	1.801688	
Prob(F-statistic)	0.000000			

$$\hat{wage} = 3,725 + 0,298\text{exper} - 0,006\text{exper}^2$$

Leitura Complementar

(Função Polinomial)

Hill, Griffiths e Judge, 2003 (2. ed) – Seção 10.1.1

Wooldridge, 2011 (4. ed) – Seção 6.2

Modelos com Função Polinomial

Em microeconomia estudam-se, por exemplo, as curvas de *custo* e as curvas de *produção* que caracterizam uma firma. A curva de *custo total* (CT), por exemplo, toma a forma cúbica.

Dessa forma, os coeficientes angulares dessa relação não são constantes, ou seja, não podemos pensar numa regressão em que a relação entre as variáveis seja linear.

Modelos com Função Polinomial

Todavia, essa relação pode facilmente ser representada por polinômios, que constituem um caso especial de interação, em que as variáveis são multiplicadas por si mesmas.

Assim, para a curva de custo total (CT), por exemplo, um modelo adequado é dado por

$$CT = \beta_1 + \beta_2 Q + \beta_3 Q^2 + \beta_4 Q^3 + \varepsilon.$$

Modelos com Função Polinomial

Dessa forma, o coeficiente angular, ou seja, a inclinação da curva de custo total (que é o custo marginal) é dada por

$$\frac{\partial E(CT | Q)}{\partial Q} = \beta_2 + 2\beta_3 Q + 3\beta_4 Q^2$$

Caso $\beta_2 > 0$, $\beta_3 < 0$ e $\beta_4 > 0$, então a curva de custo marginal terá forma de U.

Modelos com Função Polinomial

Ainda, as curvas de *custo marginal* (como já visto) e as curvas de *custo médio* tomam formas quadráticas, bem como suas imagens espelhadas, as curvas de produto médio e produto marginal.

Assim, por exemplo, para a curva de *custo médio* (CMe), um modelo adequado é dado por

$$\text{CMe} = \alpha_1 + \alpha_2 Q + \alpha_3 Q^2 + \varepsilon.$$

Modelos com Função Polinomial

Dessa forma, o coeficiente angular, ou seja, a inclinação da curva de custo médio é dado por

$$\frac{\partial E(CMe|Q)}{\partial Q} = \alpha_2 + 2\alpha_3 Q$$

Caso a CMe tenha forma de U, é esperado que $\alpha_2 < 0$ e $\alpha_3 > 0$