OBJETIVOS

Ao final desse grupo de *slides* os alunos deverão ser capazes de:

- ✓ **Explicar a diferença entre regressão espúria e cointegração.**
- ✓ **Justificar, por meio de teste de hipóteses, se um conjunto de séries temporais cointegra ou não.**
- ✓ **Estimar os parâmetros de um modelo de regressão com séries temporais não estacionárias mas cointegradas.**

Cointegração

e o

Modelo de Correção de Erros

Aula 10a

Bueno, 2011 – Capítulo 7
Enders, 2010 – Capítulo 6
Heij et al., 2004 – Seção 7.6
Hendry e Juselius (2000, 2001)

Johansen, (1996)
Juselius (2008)
Lutkepohl (1991, 2006)
Morettin, 2011 – Capítulo 10

Introdução

Um dos objetivos da Econometria é avaliar empiricamente teorias econômicas que, em geral, pressupõem relações de equilíbrio de longo prazo entre variáveis econômicas.

A averiguação das teorias econômicas pode ser feita com base em modelagem de séries temporais que, via de regra, apresentam algum tipo de tendência.

CUIDADO!!!!!

Modelos de regressão que envolvam dados de séries temporais apresentando tendência podem levar a resultados espúrios.

Regressão Espúria

Fenômeno que ocorre quando duas variáveis não são diretamente correlacionadas, mas apresentam correlação com uma terceira variável, e a regressão entre as duas primeiras é significante, mas não quer dizer nada, porque cada uma delas é explicada por essa terceira variável.

A esse fenômeno, Granger e Newbold (1974) deram o nome de problema de regressão espúria.

Observação: Uma regressão espúria costuma exibir valores baixos da estatística de Durbin-Watson e um alto valor de R^2.

Regressão Espúria

Ainda, Granger e Newbold (1974) mostraram, via simulações, que é bastante alta a probabilidade de não rejeição estatística da existência de relação entre duas variáveis geradas por dois passeios aleatórios independentes.

A priori, a solução que se recomendava, nesses casos, era estimar a regressão utilizando as variáveis na primeira diferença.

Cointegração

Porém, essa não é a melhor das soluções (eliminar a tendência através da tomada de diferenças), pois acabamos por esconder as propriedades de longo prazo da relação entre as variáveis econômicas, o que é, em última instância, a razão da estimação efetuada.

Além disso, se a tendência estocástica for comum a todas as variáveis, diz-se que existe um equilíbrio de longo prazo.

Cointegração

Phillips (1986) demonstrou que há uma situação em que é possível trabalhar com o nível das séries, e não com as primeiras diferenças, sem correr o risco de regressões espúrias, desde que as séries utilizadas sejam cointegradas de uma particular ordem.

Processos Cointegrados

Processos Cointegrados

Uma combinação linear de processos *I*(1) será usualmente *I*(1).

Em geral, se $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ forem ambos *I*(d), então a combinação linear

$$u_t = y_t - \beta_1 x_t$$

será usualmente *I*(d).

Todavia, é possível que u_t seja integrado de uma ordem menor, digamos *I*(d-b), b > 0.

Processos Cointegrados

Cointegração, portanto, implica que y_t e x_t compartilham tendências estocásticas semelhantes e, de fato, como sua diferença u_t é estacionária, elas nunca divergem muito uma da outra. Ou seja, elas comovimentarão no longo prazo porque uma combinação linear delas é reversível à média (estacionária).

Processos Cointegrados

Entretanto, no curto prazo há desvios dessa tendência comum, de modo que u_t é chamado de erro de equilíbrio, porque expressa os desvios temporários do equilíbrio de longo prazo.

Do exposto, as variáveis cointegradas y_t e x_t exibem uma relação de equilíbrio de

$$y_t - \beta_1 x_t$$

e o erro de equilíbrio, definido por

$$u_t$$

representa desvios de curto prazo a partir da relação de longo prazo.

Processos Cointegrados

Definição 1. (Engle e Granger)

As componentes do vetor $\mathbf{X}_t$ serão cointegradas de ordem (d, b), e escreveremos

$$\mathbf{X}_t \sim \text{C.I.}(d, b),$$

se:

(a) todos as componentes de $\mathbf{X}_t$ são I(d);

(b) existe um vetor $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)^\top$, não-nulo, tal que

$$\underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{\mathbf{X}_t} = \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_n X_{nt} \sim I(d-b), \; d \geq b > 0. \qquad (1)$$

O vetor β, de ordem n x 1, é chamado vetor de cointegração.

Processos Cointegrados

Definição 2. (Campbell e Perron)

As componentes do vetor $\mathbf{X}_t$, n x 1, serão ditas cointegradas de ordem (d, b), denotada por $\mathbf{X}_t$ ~ C.I. (d, b), se existir pelo menos um vetor β não nulo tal que:

$$u_t = \underset{\sim}{\mathbf{X}_\mathbf{t}}'\underset{\sim}{\beta} \sim I(d-b),\ d \geq b > 0.$$

O vetor β, de ordem n x 1, é chamado vetor de cointegração.

Observações

(i) Segundo Engle e Granger, todas as variáveis devem ser integradas de mesma ordem. Todavia, trata-se de uma condição muito restritiva, pois há modelos em economia que relacionam variáveis com diversas ordens de integração.

(ii) Por outro lado, testes sobre hipóteses econômicas poderão ser realizados, dado que houve um relaxamento sobre a condição imposta na definição dada por Engle e Granger, segundo a definição de Campbell e Perron.

Observações

(iii) O vetor de cointegração não é único, pois dado o escalar $\lambda \neq 0$, então $\lambda\beta$ é também um vetor de cointegração. Tipicamente, uma das variáveis é usada para normalizar β, fixando-se seu coeficiente igual a 1; usualmente toma-se $\beta = (1, -\beta_2, ..., -\beta_n)'$, de modo que

$$\underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{\mathbf{X}_t} = X_{1t} - \beta_2 X_{2t} - \ldots - \beta_n X_{nt}\,.$$

Observações

(iv) Por exemplo, se $\beta' X_t$ ~ I(0), temos que

$$X_{1t} = \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_n X_{nt} + u_t$$

com

$$u_t \sim I(0).$$

Nota: Em equilíbrio de longo prazo, u_t = 0 e a relação de equilíbrio de longo prazo é

$$X_{1t} = \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_n X_{nt}.$$

EXEMPLO 1

Suponha que

$$X_{1,t} = \mu_t + \varepsilon_{1,t},$$

$$X_{2,t} = \mu_t + \varepsilon_{2,t},$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t,$$

em que

os erros são i.i.d. $(0, \sigma_i^2)$ e independentes entre si.

Pergunta: $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$ são cointegradas? Justifique.

$X_{1,t}$ e $X_{2,t}$ são I(1), uma vez que μ_t é I(1). Ainda, μ_t representa a tendência estocástica comum. Finalmente, $X_{1,t} - X_{2,t} = \varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{2,t} \sim I(0)$. Ou seja, o vetor de cointegração é $\beta = (1 \ \ {-1})'$.

EXEMPLO 2

Considere as séries

$$X_{1,t} = \beta_2 X_{2,t} + \varepsilon_{1,t},$$

$$X_{2,t} = X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t},$$

em que

os erros são i.i.d. $(0, \sigma_i^2)$ e independentes entre si.

Pergunta: $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$ são cointegradas? Justifique.

Não é difícil perceber que $X_{2,t}$ é I(1) e representa a tendência estocástica comum. Ainda, a primeira equação representa a relação de equilíbrio de longo prazo. O vetor de cointegração é $\beta = (1 \ -\beta_2)'$.

Exercício 1

(ANPEC2004 – QUESTÃO 09)

Considere a seguinte regressão entre y_t e z_t:

$$y_t = \alpha z_t + u_t$$

em que

u_t é o termo de erro aleatório.

São corretas as afirmativas:

(0) Se y_t for I(1) e z_t for I(0), então y_t e z_t são cointegradas. (0) F

(1) Se y_t for I(0) e z_t for I(1), então y_t e z_t são cointegradas. (1) F

(2) Se y_t for I(1) e z_t for I(1), então y_t e z_t são cointegradas. (2) F

(3) Se y_t for I(1), z_t for I(1) e u_t for I(0), então y_t e z_t são cointegradas. (3) V

(4) Se u_t for I(0) as séries y_t e z_t são necessariamente cointegradas. (4) F

Teorema da Representação de Granger

Se

$$X_t \sim CI(1,1),$$

então ele pode ser representado por um Mecanismo/Modelo de Correção de Erros (MCE).

Modelo de Correção de Erros (MCE)

Voltando ao Exemplo 2

Considerando as séries

$$X_{1,t} = \beta_2 X_{2,t} + \varepsilon_{1,t},$$

$$X_{2,t} = X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t},$$

em que

os erros são i.i.d. (0, σ_i^2) e independentes entre si.

Vimos que $X_{2,t}$ é I(1) e representa a tendência estocástica comum. Ainda, a primeira equação representa a relação de equilíbrio de longo prazo.

Voltando ao Exemplo 2

Assim, a primeira pergunta que se faz é: ***será que a relação de equilíbrio é obedecida em todos os períodos de tempo?***

Ou seja, será que $\varepsilon_{1,t} = 0$ em todos os períodos de tempo?

Aqui, $\varepsilon_{1,t}$ faz o papel do erro de equilíbrio e representa desvios de curto prazo a partir da relação de longo prazo.

Voltando ao Exemplo 2

Assim, considerando que a resposta para a pergunta anterior seja negativa, então os desvios de curto prazo, $\varepsilon_{1,t}$, deverão ser corrigidos para que os desequilíbrios possam ser corrigidos para que a cointegração seja observada.

Voltando ao Exemplo 2

Do exposto, suponha que, por exemplo, variações em $X_{1,t}$ dependam de desvios deste equilíbrio no instante t-1, ou seja,

$$\Delta X_{1,t} = \alpha_1(X_{1,t-1} - \beta_2 X_{2,t-1}) + a_{1,t}.$$

Ainda, variações em $X_{1,t}$, além de depender dos desvios de equilíbrio no instante t-1, também podem depender das variações em $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$ no instante t-1, assim:

$$\Delta X_{1,t} = \alpha_1(X_{1,t-1} - \beta_2 X_{2,t-1}) + a_{11,1}\Delta X_{1,t-1} + a_{12,1}\Delta X_{2,t-1} + a_{1,t}$$

OBSERVAÇÃO

Relação similar poderia ser pensada para a variável $X_{2,t}$.

Assim, por exemplo

$$\Delta X_{2,t} = \alpha_2(X_{1,t-1} - \beta_2 X_{2,t-1}) + a_{2,t}$$

ou, por exemplo

$$\Delta X_{2,t} = \alpha_2(X_{1,t-1} - \beta_2 X_{2,t-1}) + a_{21,1}\Delta X_{1,t-1} + a_{22,1}\Delta X_{2,t-1} + a_{2,t}$$

Teste de Cointegração de Engle-Granger

INTRODUÇÃO

Além de muito intuitivo, o teste de cointegração de Engle e Granger (1987) é indicado para ser feito sobre uma única equação.

Todavia, num sistema com várias variáveis (n > 2), pode existir mais de um vetor de cointegração e usando o procedimento de Engle-Granger, que será descrito em breve, só é estimado 1 vetor de cointegração, o que pode não ser muito razoável, a menos que se especifique muito bem qual equação se quer testar. Assim, a solução da escolha da equação estará na especificação das relações econômicas entre essas variáveis.

Teste de Cointegração de Engle–Granger

Considere o vetor $X_t = (y_t \ \ z_t)'$, de dimensão 2 x 1, integrado de ordem 1, por exemplo.

Aqui, suponha que a forma funcional que será utilizada para conduzir o do teste de interesse seja dada por:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t \qquad \text{(EC)}$$

Cuidado: é importante tratar adequadamente a entrada dos termos determinísticos na forma funcional.

Teste de Cointegração de Engle–Granger

Após estimar os parâmetros da equação (EC), por MQO, forme os resíduos da mesma e, com base na seguinte especificação para a forma funcional auxiliar,

$$\Delta \hat{u}_t = \gamma \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \Delta \hat{u}_{t-i} + \xi_t$$

conduza um teste de hipóteses adequado, sobre o parâmetro γ, para verificar se os resíduos da (EC) são I(1) ou I(0).

Teste de Cointegração de Engle–Granger

As hipóteses de interesse são dadas por:

H_0: $\gamma = 0$ (série apresenta raiz unitária).

H_A: $\gamma < 0$ (série não apresenta raiz unitária).

- ✓ **Caso a hipótese nula não seja rejeitada, então y_t e z_t não são cointegradas (regressão espúria).**
- ✓ **Caso a hipótese nula seja rejeitada, então y_t e z_t são cointegradas (valor de β_1 tende a ter significado econômico)**

OBSERVAÇÃO

Nesse procedimento há uma diferença importante no que diz respeito aos valores críticos do teste CRADF (*cointegrated residuals* ADF) a serem tomados como referência, uma vez que os resíduos da cointegração, estimados por MQO, provavelmente serão estacionários, já que o critério de minimização da soma dos quadrados dos resíduos impõe que a soma dos resíduos seja igual a zero.

OBSERVAÇÃO

Assim, as tabelas utilizadas nos testes ADF são inadequadas, pois levam à rejeição da hipótese nula com uma frequência maior do que a realmente devida.

Portanto, para evitar tal problema, é necessário fazer uma correção nos valores críticos dessas tabelas.

Engle e Granger (1987), MacKinnon (1991, 2010) e Enders (2004) apresentam tabelas adequadas para tais testes.

OBSERVAÇÃO

Em especial, o procedimento de MacKinnon (2010) é bastante interessante para obter os valores críticos associados ao teste CRADF (n = 1, 2, ..., 12), uma vez que leva em consideração não só todos os possíveis tamanhos amostrais como também a presença ou não de termos determinísticos (constante, tendência linear e tendência quadrática). Para mais detalhes, vide o Apêndice de MacKinnon (2010), páginas 11 e 12.

Teste de Cointegração de Engle–Granger

Valores Críticos para o teste de Cointegração sugerido por Engle-Granger			
T	1%	5%	10%
50	-4,123	-3,461	-3,130
100	-4,008	-3,398	-3,087
200	-3,954	-3,368	-3,067
500	-3,921	-3,350	-3,054

Fonte: Engle e Granger (1987).

Problemas no Procedimento de Engle–Granger

1. Só tem dinâmica na segunda etapa (implica em redução de potência do teste)

   1o. Passo – Estima modelo estático

   2o. Passo – Teste CRADF gera dinâmica.

2. Requer a classificação das variáveis em endógena e exógena.

   • Só quero estudar se há comportamento de equilíbrio; não estou, sempre, interessado em relações de causa-efeito; só quero saber se as séries caminham estavelmente.

3. Se n > 2, pode existir mais de um vetor de cointegração.

   • Usando modelos de regressão só estimo 1 vetor, o que pode não ser razoável.

EXERCÍCIO

O arquivo *vendas.wf1* apresenta as séries anuais, entre os anos de 1937 e 1990, de vendas (em milhares de unidades) e de gasto com propaganda (em milhares de dólares), de uma determinada empresa norte americana. Verifique a veracidade das seguintes afirmações:

(a) A série de log(vendas) é estacionária.

(b) A série de log(gasto com propaganda) é estacionária.

(c) A regressão

$$\log(ven_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(prop_t) + u_t$$

é espúria.

EXERCÍCIO

Considere o arquivo *vendas.wf1*, que apresenta as séries anuais, entre os anos de 1937 e 1990, de vendas (em milhares de unidades) e de gasto com propaganda (em milhares de dólares), de uma determinada empresa norte americana. Com base nos resultados do teste CRADF, anteriormente aplicado, existe um MCE? Em caso negativo, explique. Em caso afirmativo, estime.

Mecanismo/Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Para compreender facilmente o MCE, considere o exemplo envolvendo os preços de um mesmo produto em diferentes mercados.

Para facilitar, imagine apenas dois mercados.

Imagine, por exemplo, que P_{1t} e P_{2t} sejam as séries de preços do produto nos mercados 1 e 2, respectivamente.

Ainda, é razoável admitir que as duas variáveis econômicas exibam uma relação de equilíbrio de longo prazo.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Ainda, considere que a relação (normalizada) de equilíbrio de longo prazo entre as séries de preços seja dada por

$$P_{1t} - \beta P_{2t}.$$

A primeira pergunta que se faz é:

será que essa relação é obedecida em todos os períodos de tempo?

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Em caso afirmativo,

$$P_{1t} - \beta P_{2t} = 0,$$

ou seja, temos uma relação matemática.

Em caso negativo,

$$P_{1t} - \beta P_{2t} = \varepsilon_t.$$

Aqui, ε_t faz o papel do erro de equilíbrio e representa desvios de curto prazo a partir da relação de longo prazo.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Assim, considerando o segundo caso, os desvios de curto prazo deverão ser corrigidos para que os desequilíbrios possam ser corrigidos para que a cointegração seja observada.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Do exposto, suponha que, por exemplo, variações em P_{1t} dependam de desvios deste equilíbrio no instante t-1, ou seja,

$$\Delta P_{1t} = \alpha_1(P_{1,t-1} - \beta P_{2,t-1}) + a_{1t}.$$

Ainda, uma relação similar pode ser pensada para P_{2t}:

$$\Delta P_{2t} = \alpha_2(P_{1,t-1} - \beta P_{2,t-1}) + a_{2t}.$$

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

O mesmo vale para um mecanismo de correção de erro mais geral. Ou seja, suponha que P_{1t} e P_{2t} sejam duas séries I(1) e que $P_{1t} - \beta P_{2t}$ seja a relação de equilíbrio.

Assim,

$$\Delta P_{1t} = \alpha_1(P_{1,t-1} - \beta P_{2,t-1}) + a_{11,1}\Delta P_{1,t-1} + a_{12,1}\Delta P_{2,t-1} + a_{1t}$$

e

$$\Delta P_{2t} = \alpha_2(P_{1,t-1} - \beta P_{2,t-1}) + a_{21,1}\Delta P_{1,t-1} + a_{22,1}\Delta P_{2,t-1} + a_{2t}.$$

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Das equações anteriores, defina o vetor X_t como

$$X_t = (P_{1t} \;\; P_{2t})'$$

assim, podemos escrever o modelo anterior da seguinte forma:

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\mathbf{A}} \Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(1)}$$

com

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{pmatrix}$$

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Supondo que P_{1t} e P_{2t} sejam I(1), então ΔP_{1t} e ΔP_{2t} serão ambas I(0). Ainda, os membros do lado direito das igualdades deverão ser I(0).

Supondo os erros a_{1t} e a_{2t} ruídos brancos estacionários, segue-se que

$$\alpha_i(P_{1,t-1} - \beta P_{2,t-1}) \sim I(0),\ i = 1, 2.$$

Logo, se $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$, segue que $P_{1t} - \beta P_{2t} \sim I(0)$ e representa uma relação de cointegração entre P_{1t} e P_{2t}.

OBSERVAÇÕES

(i) É fácil perceber que (1) é um modelo VAR(1) nas primeiras diferenças, com um termo de correção de erro adicionado.

(ii) Os parâmetros α_1 e α_2 são relacionados à velocidade de ajustamento. Se ambos forem nulos não há relação de longo prazo.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Ainda, (1) pode ser escrito como

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_t - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\mathbf{A}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-2}\right) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$$

ou

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \left(\underset{\sim}{\mathbf{I}}_n + \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' + \underset{\sim}{\mathbf{A}}\right)\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} - \underset{\sim}{\mathbf{A}}\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-2} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$$

Ou seja, (1) pode ser visto através de um VAR(2), em nível.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Não é difícil mostrar que para um VAR(2) n-dimensional,

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_1 \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_2 \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-2} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(2)}$$

teremos

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\mathbf{F}}_1 \Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} - \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}} \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(3)}$$

com

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}_1 = -\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_2 \qquad \textbf{e} \qquad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_n - \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_1 - \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_2$$

OBSERVAÇÃO

Já foi estudado, anteriormente, que o sistema descrito em (2) será estável se todas as soluções de

$$\det\left(\underset{\sim}{\mathbf{I}_{\mathbf{n}}} - \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}_{\mathbf{1}}} L - \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}_{2}} L^{2} \right) = 0$$

estiverem fora do círculo unitário.

Todavia, aqui, suponha que o vetor seja não-estacionário, com um ou mais autovalores sobre o círculo unitário e os demais dentro do círculo.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Do *slide* anterior,

$$\det\left(\underset{\sim}{\mathbf{I}_{\mathbf{n}}} - \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}_{\mathbf{1}}} - \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}_{2}}\right) = 0$$

logo, a matriz

$$\Pi = \mathbf{I_n} - \Phi_1 - \Phi_2$$

é singular.

Ainda, suponha que o posto de Π seja igual a r. Ou seja,

$$\rho(\Pi) = r\ (< n).$$

OBSERVAÇÃO 1

De acordo com um teorema proposto por Granger (vide, por exemplo, Bueno, 2008, página 213), se uma matriz não tiver posto completo ela poderá ser decomposta em duas matrizes multiplicativas. Ou seja, em nosso caso, teremos

$$\underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{\alpha}\,\underset{\sim}{\beta}'$$

Essa será uma propriedade bastante adequada para dar uma interpretação econômica a séries temporais e é a base para desenvolver o teste de cointegração multivariado de Johansen, que será visto em breve.

OBSERVAÇÃO 2

- **Se posto de Π for igual a zero, não existe cointegração, pois não existe vetor de correção de erros. Logo, ΔX_t tem representação VAR(p-1) estacionária.**

- **Se posto de Π for igual a n, então o vetor $X_t \sim I(0)$. Logo, não faz sentido falar em cointegração. Ou seja, X_t tem uma representação VAR(p) estacionária.**

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Da Observação 1, Π pode ser decomposta como

$$\Pi = \alpha\beta',$$

em que

α e β apresentam ordem n x r e posto igual a r.

Dessa forma, não é difícil ver que (3) fica escrito como

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\mathbf{F}}_1 \Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad (4)$$

que é análoga a (1).

OBSERVAÇÃO

Ainda, de (4), não é difícil observar que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}_1\,\Delta\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} - \Delta\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_t + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$$

é I(0).

Assim, o lado esquerdo da igualdade continuará sendo I(0)

se o pré-multiplicarmos por

$$\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}'\right)^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}'$$

OBSERVAÇÃO

Ou seja,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}'\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} \sim I(0)$$

e, finalmente,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}'\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t} \sim I(0).$$

Segue-se que cada linha do resultado anterior representará uma relação de cointegração.

Conclui-se, ainda, que a partir de um VAR(2) n-dimensional, obtemos um modelo nas primeiras diferenças com variáveis cointegradas.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

A forma descrita em (4) é chamada de forma de correção de equilíbrio ou de correção de erros.

Segundo Hendry e Juselius (2001), a forma (4) é mais apropriada se quisermos discriminar entre efeitos de ajustamento de curto prazo a relações de longo prazo e os efeitos de variações nas diferenças defasadas.

Em (4), a matriz de níveis defasados, Π, está no instante *t-1*, mas pode ser escolhida estar em qualquer defasagem.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

O modelo de correção de erros é assim chamado porque explica ΔX_t por dois componentes:

o fator de curto prazo, representado por

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}_1}\,\Delta\,\underset{\sim}{\mathbf{X}_{t-1}}$$

e a relação de longo prazo dada entre as coordenadas do vetor de variáveis endógenas

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}\,\underset{\sim}{\mathbf{X}_{t-1}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}'}\,\underset{\sim}{\mathbf{X}_{t-1}}$$

considerando que haja cointegração.

Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Em (4), α e β são duas matrizes de ordem n x r e posto r.

Dizemos que β é a matriz de cointegração ou de vetores cointegrados e α é a matriz de cargas ou matriz de coeficientes de ajustamento.

OBSERVAÇÃO

Vale a pena observar que

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t \sim I(0) \qquad \textbf{e} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} \sim I(0)$$

Assim, esses termos apresentam médias constantes, ou seja:

$$E\left(\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t\right) = \underset{\sim}{\mathbf{c}}$$

representando taxas de crescimento; e

$$E\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1}\right) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$$

representando os interceptos nas relações de cointegração.

OBSERVAÇÃO

Assim, do *slide* anterior e partindo de (4), um resultado mais abrangente, dado por

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t - \underset{\sim}{\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^{p-1} \underset{\sim}{\mathbf{F}}_i \left(\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-i} - \underset{\sim}{\mathbf{c}} \right) - \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \right) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad (5)$$

pode ser facilmente obtido.

Em (5), vemos que há duas formas de correção de equilíbrio: uma do crescimento dos dados à sua média e, outra, dos vetores de cointegração em relação à sua média. Em análises de séries reais, temos que verificar se c e μ são diferentes de zero ou não.

Teste de Cointegração de Johansen

Introdução

Johansen propõe um teste para definir o posto da matriz Π e, por consequência, o espaço de cointegração. Com base nisso, podemos estimar os vetores de cointegração contidos em β.

A metodologia proposta pelo autor é interessante porque é empreendida simultaneamente à estimação do modelo de correção de erros vetorial (VEC).

Introdução

Ou seja, a metodologia proposta por Johansen permite a estimação do VEC simultaneamente aos vetores de cointegração.

Para identificar o posto, Johansen propõe dois testes, baseados em uma estimação por máxima verossimilhança restrita.

Introdução

A ideia de Johansen é usar a configuração VAR e procurar o posto da matriz Π de uma forma bastante inteligente.

De forma intuitiva, caso haja cointegração, o posto da matriz Π, que apresenta dimensão n x n, será menor que n, digamos igual a r.

Introdução

Vale observar que, aqui, a ideia de posto nulo é análoga à ideia de raiz unitária no modelo univariado.

Naquele caso, o coeficiente que multiplicava a variável original defasada em um passo era nulo ante a presença de raiz unitária.

No caso multivariado, posto nulo significa que a matriz $\Pi = 0$. Dessa forma, trata-se de uma raiz unitária multivariada.

Teste de Cointegração de Johansen

O procedimento de Johansen é uma generalização multivariada do teste ADF.

Considere o seguinte modelo:

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_0 \underset{\sim}{\mathbf{D}}_t + \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\mathbf{F}}_1 \Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \ldots + \underset{\sim}{\mathbf{F}}_{p-1} \Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-(p-1)} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(6)}$$

em que

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}} = \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_1 + \ldots + \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}_p - \underset{\sim}{\mathbf{I}}_n$$

$\underset{\sim}{\mathbf{D}}_t$ **– Contém termos determinísticos (constantes, tendências, etc.).**

Teste de Cointegração de Johansen

O procedimento sugerido por Johansen (1988, 1995), para testar a existência de cointegração, é baseado nos seguintes passos:

i. **Verificar a ordem de integração das séries envolvidas;**

ii. **Especificar e estimar os parâmetros de um modelo VAR(p) para o vetor X_t, que supomos I(d);**

iii. **Verificar a existência de termos determinísticos (dentro e fora do vetor de cointegração);**

iv. **Construir testes RV para se determinar o número de vetores de cointegração, que sabemos ser igual ao posto da matriz Π;**

v. **Dados os vetores de cointegração (normalizados apropriadamente), estimar o MCE (via EMV).**

Teste de Cointegração de Johansen

É sabido que o posto de Π fornece também o número de autovalores não-nulos de Π. Suponha a seguinte ordem para tais autovalores normalizados: $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n$. Se as séries não forem cointegradas, então $\rho(\Pi) = 0$ e todos os autovalores serão nulos. Ou, ainda, $\log_e(1-\lambda_i) = 0$, para todo i.

Um teste de RV para testar o posto de Π é baseado na estatística traço

$$\lambda_{traço}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{n} \log_e\left(1-\hat{\lambda}_i\right). \qquad \textbf{(7)}$$

Teste de Cointegração de Johansen

A estatística (7) testa

$$H_0 : r \leq r_0$$

$$H_A : r > r_0 \qquad \textbf{(8)}$$

Se $\rho(\Pi) = r_0$, então

$$\hat{\lambda}_{r_0+1}, \ldots, \hat{\lambda}_n$$

são aproximadamente nulas e (7) será pequena; caso contrário, será grande. Ainda, a distribuição assintótica de (7) é uma generalização multivariada da distribuição ADF e depende da dimensão $n - r_0$ e da especificação dos termos determinísticos.

Teste de Cointegração de Johansen

Os valores críticos podem ser encontrados em Osterwald-Lenum (1992) para os casos 1 a 5 e n – r_0 = 1, 2, ..., 10.

Ainda, Johansen também utiliza a estatística do máximo autovalor

$$\lambda_{\max}(r_0) = -T \log_e\left(1 - \hat{\lambda}_{r_0+1}\right) \qquad \textbf{(9)}$$

para testar

$$H_0 : r = r_0$$

$$H_A : r = r_0 + 1. \qquad \textbf{(10)}$$

Teste de Cointegração de Johansen

A distribuição assintótica de (9) também depende da dimensão n – r_0 e da especificação dos termos determinísticos. Valores críticos podem ser encontrados na referência anteriormente citada.

Supondo-se que o posto de Π é igual a r, Johansen (1988) prova que o estimador de máxima verossimilhança de β é dado por

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}_{MV}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\hat{\upsilon}_1} & \underset{\sim}{\hat{\upsilon}_2} & \cdots & \underset{\sim}{\hat{\upsilon}_r} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

Teste de Cointegração de Johansen

em que

$\underset{\sim}{\hat{\upsilon}_i}$ é o autovetor associado ao autovalor $\hat{\lambda}_i$

Ainda, os EMV dos parâmetros restantes são obtidos por meio de uma regressão multivariada com β substituído pelo seu respectivo EMV. Johansen (1995) mostra a normalidade assintótica dos estimadores de β.

EXERCÍCIO

Considere o arquivo *vendas.wf1*, que apresenta as séries anuais, entre os anos de 1937 e 1990, de vendas (em milhares de unidades) e de gasto com propaganda (em milhares de dólares), de uma determinada empresa norte americana.

a) Conduza o teste de cointegração proposto por Johansen. Interprete os resultados.

b) Com base nos resultados do item anterior, estime um modelo adequado para o vetor de variáveis resposta de interesse, escreva os resultados na forma usual e interprete-os.

Leitura Complementar I

(Restrições na Matriz de Cargas e nos Vetores de Cointegração)

Introdução

Um aspecto bastante interessante do procedimento de Johansen é poder testar formas restritas do vetor de cointegração. Isso é possível porque, se há r vetores de cointegração, apenas essas r combinações lineares de variáveis são estacionárias. Assim, posso reestimar os modelos impondo as restrições desejadas e, se elas forem adequadas, então o número de vetores de cointegração não deve diminuir. Assim, estime os modelos restrito e irrestrito. Obtenha os autovalores de cada modelo, respectivamente ordenados como $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_n$ e $\hat{\lambda}_1^* > \hat{\lambda}_2^* > \ldots > \hat{\lambda}_n^*$.

Teste de Hipóteses

A estatística do teste será dada por:

$$LR = -T \sum_{i=r+1}^{n} \left[\ln\left(1 - \hat{\lambda}_i^*\right) - \ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right) \right] \xrightarrow{d} \chi_\nu^2$$

A intuição é que os autovalores de cada uma das regressões devem ser próximos, caso a restrição imposta seja válida.

Observação

Para se impor restrições no vetor de cointegração, devemos observar, primeiro que o elemento (i, j) se refere à transposta da matriz β. Ou seja, a *i-ésima* relação de cointegração tem a seguinte representação:

$$B(i,1)\cdot y_1 + B(i,2)\cdot y_2 + \ldots + B(i,k)\cdot y_k$$

em que,

y_1, y_2, ..., y_k são as variáveis do vetor resposta.

EXERCÍCIO

Com base nos resultados obtidos no exercício anterior:

a) Conduza um teste de hipóteses adequado, sobre os parâmetros do vetor de cointegração, que verifique se a elasticidade é unitária.

b) Conduza um teste de hipóteses adequado, sobre os parâmetros da matriz de cargas, que verifique se a relação de cointegração só entra na equação ligada à propaganda.

c) Repita (a) e (b) conjuntamente.

Leitura Complementar II

(Inclusão dos termos determinísticos)

Escolha dos Termos Determinísticos

Segundo Johansen (1994, 1995), os termos determinísticos em (6) são restritos à forma

$$\underset{\sim}{\mathbf{D}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_1 t. \qquad \textbf{(12)}$$

Para verificarmos o efeito dos termos determinísticos no modelo VAR, vamos considerar o seguinte caso especial:

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_1 t + \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(13)}$$

Escolha dos Termos Determinísticos

A ideia, aqui, é decompor os vetores μ_0 e μ_1 em relação à média das relações de cointegração e em relação à média das taxas de crescimento, ou seja,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{0}} + \underset{\sim}{\mathbf{c}}_{\mathbf{0}}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\rho}}_1 + \underset{\sim}{\mathbf{c}}_1 \qquad \textbf{(14)}$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{0}} + \underset{\sim}{\mathbf{c}}_{\mathbf{0}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\rho}}_1\, t + \underset{\sim}{\mathbf{c}}_1\, t + \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(15)}$$

Escolha dos Termos Determinísticos

Ou, ainda,

$$\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\boldsymbol{\rho}}_0 & \underset{\sim}{\boldsymbol{\rho}}_1 & \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{c}}_0 + \underset{\sim}{\mathbf{c}}_1 t \end{pmatrix} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \qquad \textbf{(16)}$$

com

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}^{*}_{t-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{t-1} \end{pmatrix}$$

Escolha dos Termos Determinísticos

Podemos sempre escolher ρ_0 e ρ_1 tais que o erro de equilíbrio

$$\left(\beta^*\right)' \underset{\sim}{\mathbf{X}_t^*} = \underset{\sim}{\mathbf{v}_t}$$

tenha média zero, logo

$$E\left(\Delta \underset{\sim}{\mathbf{X}_t}\right) = \underset{\sim}{\mathbf{c}_0} + \underset{\sim}{\mathbf{c}_1} t$$

Vale a pena observar que se $c_0 \neq 0$ temos um crescimento constante nos dados e se $c_1 \neq 0$ temos uma tendência linear nas diferenças ou tendência quadrática nos níveis das variáveis. Aqui, existem 5 casos a considerar:

Escolha dos Termos Determinísticos

Caso 1. **Constante nula, $\mu_t = 0$; neste caso, $\rho_0 = \rho_1 = 0$ e o modelo não possui qualquer componente determinística, com $X_t \sim I(1)$ sem *drift* (não há crescimento dos dados) e as relações de cointegração apresentam média igual a zero. Esse caso é útil quando as variáveis são expressas na mesma unidade. Por exemplo, números índices na mesma base.**

Escolha dos Termos Determinísticos

Caso 2. **Constante restrita, $\mu_t = \mu_0 = \alpha\rho_0$; neste caso, $\rho_1 = 0$, $c_0 = 0$, mas $\rho_0 \neq 0$ e, portanto, não há tendência linear nos dados e as relações de cointegração têm média ρ_0. Esse caso é útil quando as variáveis não exibem tendência linear e existe uma diferença de patamar entre as variáveis.**

Caso 3. **Constante irrestrita, $\mu_t = \mu_0$; neste caso, $\rho_1 = 0$ e as séries do vetor X_t são I(1) sem *drift* e as relações de cointegração podem ter médias diferentes de zero. Esse caso é útil quando temos a presença de uma tendência linear na variável original (equivalente a uma constante na ΔX_t).**

Escolha dos Termos Determinísticos

Caso 4. Tendência restrita, $\mu_t = \mu_0 + \alpha\rho_1 t$; neste caso, $c_1 = 0$, mas c_0, ρ_0 e ρ_1 são irrestritos. As séries são I(1) com *drift* e as relações de cointegração têm uma tendência linear. Esse caso só é útil quando as variáveis exibem tendência linear. Aqui, as tendências se anulam dentro do vetor. Ainda, esse caso consegue captar crescimento de outras variáveis que não estão contempladas no modelo (por exemplo, variáveis difíceis de mensurar).

Escolha dos Termos Determinísticos

Caso 5. Tendência irrestrita, $\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t$; aqui, não existe nenhuma restrição sobre μ_0 e μ_1. Ainda, séries são I(1) com tendência linear (logo, tendência quadrática nos níveis) e as relações de cointegração apresentam tendência linear. Aqui, previsões podem ser ruins. Ou seja, cuidado ao adotar essa opção.

Escolha dos Termos Determinísticos

DICA

O gráfico das variáveis nos auxilia num possível descarte dos modelos 1 e 5.

1: Via de regra, variáveis são medidas de forma distinta;

5: Muito difícil séries econômicas apresentarem tendência quadrática.

Para mais detalhes, vide, por exemplo, Hendry e Juselius (2001).

Escolha dos Termos Determinísticos

OBSERVAÇÃO

Os casos 1 a 5 são usualmente referidos como $H_2(r)$, $H_1^*(r)$, $H_1(r)$, $H^*(r)$ e $H(r)$, respectivamente. O MCE irrestrito é denotado por $H(r)$, significando que $\rho(\Pi) \leq r$. Obtemos, então, uma seqüência de modelos hierárquicos

$$H(0) \subset \ldots \subset H(r) \subset \ldots \subset H(n),$$

em que

H(0) indica o modelo VAR não cointegrado; e

H(n) indica o modelo VAR(p) irrestrito estacionário.

Leitura Complementar III

(Exogeneidade)

Engle, Hendry e Richard (1983) – Artigo Básico

Exogeneidade

Econometria “Clássica”

Exogeneidade Estrita: uma variável y_t é estritamente exógena se ela é independente de todos os termos aleatórios do modelo em todos os instantes de tempo.

Exogeneidade

Objetivos

1. **Inferência (estimar parâmetros e realizar testes de hipóteses): Exogeneidade Fraca.**
2. **Previsão: Exogeneidade Forte.**
3. **Análise de Política Econômica: Superexogeneidade.**

Exogeneidade Fraca

Definição. uma variável z_t é fracamente exógena (ou exógena fraca), em relação aos parâmetros de interesse, Ψ, se, e somente se, existir uma reparametrização de θ, dada por

$$\theta = [\lambda_1 \ \lambda_2]$$

tal que

1. Ψ é função apenas de λ_1;

2. a fatoração da densidade conjunta realiza um corte seqüencial, ou seja,

$$F_X(x_t ; \theta) = F_{Y|Z} (y_t \mid z_t ; \lambda_1).F_Z(z_t ; \lambda_2)$$

Exogeneidade Fraca

Definição (cont.).

em que

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Lambda_1 \times \Lambda_2,$$

ou seja,

λ_1 **e** λ_2 **são parâmetros de variação livre.**

<u>Cointegração e Exogeneidade Fraca</u>

(Parâmetros de Interesse: vetores de cointegração)

Quando os coeficientes da matriz α **são zeros, a variável explicada é dita fracamente exógena.**

Exogeneidade Forte

Definição. z_t é fortemente exógena, em relação aos parâmetros de interesse, Ψ, se

1. z_t é fracamente exógena em relação a Ψ;
2. z_t não é Granger causada por y_t.

Observação

A ideia associada à exogeneidade forte é querer descartar o modelo marginal, pois, caso contrário, na hora da previsão teríamos problemas, uma vez que precisaríamos do modelo marginal para "re-alimentar" a equação condicional.

Cointegração e Exogeneidade Forte

Quando os coeficientes da matriz α são zeros, a variável explicada é dita fracamente exógena. Para verificar se essa mesma variável, que está sendo explicada, é fortemente exógena, basta verificar se na equação de interesse as variações defasadas das demais variáveis não são relevantes para explicar tal variável estudada.

Superexogeneidade

- A ideia, aqui, está associada ao fato de querer verificar, por exemplo, se uma determinada política econômica foi efetiva.

- Ou seja, o governo toma certas medidas e se os agentes, que não são insensíveis, ficarem conhecendo tais medidas, eles reagirão a elas e essas medidas não terão servido para nada.

- O agente “mudar de comportamento” significa que no modelo de interesse os parâmetros associados aos agentes mudarão de valor.

Superexogeneidade

Definição. z_t é superexógena, em relação aos parâmetros de interesse, Ψ, se

1. z_t é fracamente exógena em relação a Ψ;
2. λ_1 é invariante em relação a mudanças em λ_2, provocadas pelas intervenções (por exemplo, medidas governamentais) no modelo marginal.

Observação

Se houver mudanças nos parâmetros (devido às políticas), então os agentes reagiram e os λ's não são invariantes.

Superexogeneidade

Testes

1. Compare os resíduos recursivos dos modelos marginal e condicional. Veja, por exemplo, se houve "quebra" no comportamento das estimativas dos parâmetros dos modelos marginal e condicional. Em caso afirmativo, não existe, então, a superexogeneidade.
2. Trabalhe com *dummies* no modelo marginal para tentar capturar o efeito da intervenção. Ainda, utilize as mesmas *dummies* no modelo condicional para verificar se intervenções afetam tal modelo. Em caso afirmativo, descarte a superexogeneidade.

Voltando ao Exercício

Com base nos resultados anteriores:

a) **Alguma variável do sistema pode ser considerada fracamente exógena? Justifique a sua resposta através de uma análise inferencial adequada.**

b) **Alguma variável do sistema pode ser considerada fortemente exógena? Justifique a sua resposta através de uma análise inferencial adequada.**