PROVA BRANCA

Aluno(a): HEDIBERT FREITAS LOPES

Curso: MEU No de matrícula: 0001

Turma: MINHA Professor(a): EU MESMO!

ECONOMETRIA AVANÇADA
Prova Final - PF
11/06/2015

Prezado(a) Aluno(a),

Você terá 120 minutos a partir do início oficial da prova para concluir esta avaliação, administre bem o seu tempo. Leia atentamente as instruções a seguir e as questões da prova antes de começar a resolvê-la.

1. Identifique-se com letra legível em todas as folhas de prova.
2. Esta avaliação é composta de 4 questões e um total de 10 páginas. Verifique se a prova está completa e/ou se há problemas de impressão e comunique o aplicador antes de iniciar a prova. Comunicação posterior não será considerada.
3. Para a resolução das questões, utilize apenas os campos demarcados e não destaque as folhas de prova.
4. A resolução da prova poderá ser feita a lápis ou a caneta. Avaliações feitas a lápis, no entanto, não serão revisadas pelo professor.
5. Em caso de dúvida sobre alguma questão desta avaliação, redija um texto na folha de prova explicitando-a para que o professor avalie a pertinência durante a correção.
6. Consulta a colegas e a qualquer material estranho (celular, tablet, notebook e livro) constituirão violações ao Código de Ética e de Conduta e acarretarão sanções nele previstas. Faça o seu trabalho de maneira ética!
7. Você somente poderá sair da sala depois de entregar a prova. Caso necessite sair durante a realização da avaliação, peça autorização antecipadamente ao aplicador.

Boa Prova!

Para uso exclusivo do Professor: Lápis ☐ Caneta ☐

Questão	Valor	Nota
1	2,0	2
2	2,0	2
3	5,0	5
4	1,0	1
Total	10,0	10

Parabéns para mim!

Aluno(a): ____

Curso: ______________________ No de matrícula: ______________

Turma: ______________________ Professor(a): ______________

OBSERVAÇÕES ADICIONAIS

1. Mantenha sobre a mesa somente estas folhas de prova e de resolução, lápis (ou lapiseira), caneta, borracha, régua e calculadora convencional (sem acesso à internet). **Não será permitido o empréstimo de material durante a realização da prova.**

2. O verso das folhas pode ser usado como rascunho, porém, **não será levado em consideração durante a correção das questões.**

3. Leia atentamente cada questão e responda o que for pedido. **Erros conceituais serão penalizados, mesmo que o conceito não se relacione com o que foi pedido na questão.**

4. Caso, em algum item você necessite do resultado de um item anterior que você não conseguiu fazer, admita um valor razoável para esse resultado e faça o item normalmente. Indique na questão, caso isso aconteça.

5. **Todos os resultados devem ser justificados. Números que apareçam sem uma explicação de como foram encontrados serão ignorados na correção.**

6. Durante a realização desta avaliação você poderá utilizar qualquer resultado visto em sala de aula, desde que o adapte para a situação apresentada na pergunta, ou seja, desde que você deixe bem claro como todos os valores estão sendo gerados.

7. **é obrigação do aluno** providenciar para a prova uma calculadora em perfeito estado de funcionamento. Caso haja problemas com a calculadora durante a prova o aluno terá que resolver as questões à mão.

8. Nesta prova, haverá a possibilidade de **CONSULTAR UM FORMULÁRIO**, elaborado em, **no máximo, 3 folhas de papel sulfite, tamanho A4, escrito manualmente por você** (impressão, fotocópia ou material obtido via reprografia deverá ser retirada do aluno).

Aluno(a): ______________________

Curso: ______________________ **No de matrícula:** ______________________

Turma: ______________________ **Professor(a):** ______________________

Questão I (2,0 pontos): Assuma que o vetor $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ siga o seguinte processo VAR(1):

$$y_t = \nu + Ay_{t-1} + u_t = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 2,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,0 & 0,9 \end{pmatrix} y_{t-1} + u_t,$$

onde $\{\cancel{y_t}\}$ u_t é um processo ruído branco. **(a) (1,0)** Verifique se esse VAR(1) é estacionário.

Para verificar estacionariedade, basta checarmos se as raízes do polinômio

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,0 & 0,9 \end{pmatrix} z \right| = 0,$$

estão fora do círculo unitário. Vejamos

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,0 & 0,90 \end{pmatrix} z \right| = \begin{vmatrix} 1-0,9z & -0,05z \\ 0 & 1-0,9z \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(1-0,9z)(1-0,9z) = 0 \iff z = \frac{1}{0,9} > 1.$$

Portanto, $\{y_t\}$ é um processo estacionário.

Aluno(a): ______________________________

Curso: ______________________ No de matrícula: ______________________

Turma: ______________________ Professor(a): ______________________

Questão I (continuação):

(b) (1,0) Se estacionário, derive μ, Φ_1 e Φ_2 em sua versão VMA(∞): $y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i u_{t-i}$.

Como vimos em sala para o caso VAR(1)

$$y_t = \nu + A y_{t-1} + u_t$$

a representação VMA(∞) tem elementos

$$\mu = (I - A)^{-1} \nu = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,09 \\ 0 & 0,81 \end{pmatrix}$$

0

$$\mu = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,05 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(0,1)(0,1)} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Aluno(a): ______________________________

Curso: ______________________ **No de matrícula:** ______________

Turma: ______________________ **Professor(a):** ______________

Questão II (2,0 pontos): Em finanças, o retorno de uma ação pode depender da sua volatilidade. O modelo GARCH-M (GARCH *in the mean*) pode ser usado para modelar esse fenômeno:

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t \qquad a_t = \sigma_t \epsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

onde μ e c são constantes. O parâmetro c é chamado de parâmetro de prêmio de risco (*risk premium*). Um valor positivo de c indica que o retorno é positivamente relacionado a sua volatilidade. A literatura apresenta várias outras especificações de risco de prêmio, incluindo $r_t = \mu + c\sigma_t + a_t$ (desvio-padrão) e $r_t = \mu + c\log(\sigma_t^2) + a_t$ (log-variância). Mostre que a formulação do GARCH-M acima implica a existência de correlação serial na série de retornos r_t. A existência de prêmio de risco é, portanto, uma outra razão para a presença empírica de correlação serial em séries históricas de retornos.

Basta mostrar que existe correlação serial para alguma defasagem. Por exemplo

$$\text{cov}(r_t, r_{t+1}) = \text{cov}(\mu + c\sigma_t^2 + a_t, \mu + c\sigma_{t+1}^2 + a_{t+1})$$

$$= c^2 \text{cov}(\sigma_t^2, \sigma_{t+1}^2)$$

$$= c^2 \text{cov}(\sigma_t^2, \alpha_0 + \alpha_1 a_t + \beta_1 \sigma_t^2)$$

$$= c^2 \beta_1 \text{Var}(\sigma_t^2)$$

que é não nula se $|c| \neq 0$, portanto gerando autocorrelação de ordem 1 nos retornos $\{r_t\}$.

Aluno(a): ______

Curso: ______ **No de matrícula:** ______

Turma: ______ **Professor(a):** ______

Questão III (5,0 pontos): Suponha que o interesse é estudar o comportamento conjunto das variáveis z_t e y_t, ambas medidas em porcentagem, e chegou-se ao seguinte modelo:

$$\begin{aligned} z_t &= \lambda z_{t-1} + u_{t1} \\ y_t &= \alpha z_t + \beta y_{t-1} + u_{t2}, \end{aligned}$$

onde $u_t = (u_{t1}, u_{t2})'$ é ruído branco bivariado com média zero e variância $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

(a) (1,0) Reescreva as equações acima forma de um VAR estrutural.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

Aluno(a): ______________________________

Curso: ____________________ **No de matrícula:** ____________________

Turma: ____________________ **Professor(a):** ____________________

Questão III (continuação):

(b) **(1,0)** Reescreva o modelo na versão reduzida do VAR, $\cancel{y}_t = A\cancel{y}_{t-1} + \epsilon_t$, onde $\epsilon_t \sim (0, \Omega)$, e derive de forma clara os componentes das duas matrizes (2×2): matriz de coeficientes A e matriz de variância Ω.

O modelo SVAR do item (a) pode ser reescrito na forma reduzida com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha\lambda & \beta \end{pmatrix}$$

e

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \alpha\sigma_1^2 \\ \alpha\sigma_1^2 & \alpha^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Aluno(a): ______

Curso: ______ No de matrícula: ______

Turma: ______ Professor(a): ______

Questão III (continuação):

(c) (2,0) Caso fosse estimada a versão reduzida do VAR, então todos parâmetros da versão estrutural do VAR de interesse seriam recuperados? Justifique a sua resposta.

Na forma reduzida estima-se

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{w}_1^2 & \hat{w}_{12} \\ \hat{w}_{12} & \hat{w}_2^2 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ parâmetros})$$

e

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Assim $\hat{\lambda} = \hat{a}_{11}$, $\hat{\alpha} = \frac{\hat{a}_{21}}{\hat{a}_{11}}$ e $\hat{\beta} = \hat{a}_{22}$.

Além disso, $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{w}_1^2$ e $\hat{\sigma}_2^2 = \hat{w}_2 - \hat{w}_{12}$. O problema é que $\hat{\alpha} = \frac{\hat{w}_{12}}{\hat{w}_1^2}$ pelas restrições nas matrizes de variâncias. Ou seja, o modelo é "sobre-identificado".

Aluno(a): ______________________________

Curso: ______________________ No de matrícula: ______________

Turma: ______________________ Professor(a): ______________

Questão III (continuação):

(d) **(1,0)** Após coletar os dados das séries de interesse, estimativa pontual da matriz de coeficientes autoregressivos na forma reduzida é

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,02 \\ 0,22 & 0,82 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $0,84$ e $0,57$. Podemos afirmar que o VAR na forma reduzida é estacionário? Justifique adequadamente a sua resposta.

Solução imediata: Sim, o VAR na forma reduzida é estacionário pois ambos autovalores são menores que um em valor absoluto.

Solução mais longa:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,59 & 0,02 \\ 0,22 & 0,82 \end{pmatrix} z \right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-0,59z & -0,02z \\ -0,22z & 1-0,82z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-0,59z)(1-0,82z) - 0,0044z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1,41z + 0.4838z^2 - 0,0044z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2,941176 + 2,085941 = 0 \Leftrightarrow z = 1,74800$$

$$z = 1,194.$$

Portanto, o VAR na forma reduzida é estacionário.

Aluno(a): ______

Curso: ______ **No de matrícula:** ______

Turma: ______ **Professor(a):** ______

Questão IV (1,0 pontos): Sabe-se que a série temporal $\{x_t\}$ (latente/não-observável) é medida com incerteza através de y_t, isto é

$$y_t = x_t + e_t \qquad e_t \sim N(0, \sigma_e^2).$$

Sabe-se também que a dinâmica do processo latente, $\{x_t\}$, pode ser descrita por um modelo AR(3):

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \phi_3 x_{t-3} + a_t \qquad a_t \sim N(0, \sigma_a^2),$$

onde $\{e_t\}$ e $\{a_t\}$ são independentes e os valores iniciais de x_j para $j \leq 0$ são independentes de e_t e a_t para todo $t > 0$. Escreva esse modelo na forma de espaço-de-estados.

Modelo na forma de espaço-de-estados:

$$\underset{1\times1}{y_t} = \underset{1\times3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \end{pmatrix}} + e_t \qquad e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$$

$$\underset{3\times1}{\begin{pmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \end{pmatrix}} = \underset{3\times3}{\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ x_{t-3} \end{pmatrix}} + \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} a_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{3\times1}{\begin{pmatrix} a_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \sim N\left[\underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{3\times3}{\begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \right]$$

#