

Problema 1. Seja $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ modelado pelo seguinte VAR(1):

$$y_t = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} y_{t-1} + \epsilon_t$$

onde $\epsilon_t \sim N(0, \Sigma)$, $\Sigma = 100I_2$ e $y_0 = 0$.

- Simule y_1, y_2, \dots, y_{200} seguindo o processo acima;
 - Obtenha previsão h -passos a frente, isto é, $y_{200}(h)$ e respectivos intervalos de 95% de confiança, para $h = 1, 2, \dots, 20$,
 - Mostre que esse VAR não é estacionário;
- a) Use seu pacote estatístico favorito. Pela figura 1 percebe-se nitidamente que ambas séries y_{1t} e y_{2t} são não estacionárias. Isso é provado matematicamente em c) abaixo.
- b) Vimos na aula que para obtermos a previsão h -passos a frente do VAR(1) basta reescrevermos y_{200+h} como função de $y_{200}, u_{201}, \dots, u_{200+h}$ e potências de A . Genericamente, para qualquer t (inclusive $t = 200$, obviamente):

$$y_{t+h} = (I_q + A + A^2 + \dots + A^{h-1})\nu + A^h y_t + \sum_{i=0}^{h-1} A^i u_{t+h-i},$$

e calcularmos $E(y_{t+h}|y_1, \dots, y_t) = y_t(h)$ e $V(y_{t+h}|y_1, \dots, y_t) = V_t(h)$. Como $\nu = 0$, segue que

$$y_{200}(h) = A^h y_{200} \quad \text{e} \quad V_{200}(h) = \sum_{i=0}^{h-1} A^i \Sigma (A^i)'$$

A figura 2 apresenta as previsões e respectivos intervalos de confiança.

- Para mostrar que o VAR(1) acima não é estacionário, basta mostrar que pelo menos uma raiz do polinômio abaixo está dentro ou no círculo unitário.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} z \right| = \begin{vmatrix} 1 - 0.6z & -0.8z \\ -0.1z & 1 - 0.8z \end{vmatrix} = (1 - 0.6z)(1 - 0.8z) - 0.08z^2$$

É fácil ver que a solução de $1 - 1.40z + 0.4z^2 = 0$ são $z_1 = 2.5$ e $z_2 = 1$. Portanto esse VAR(1) bivariado tem uma raiz unitária que o faz, conseqüentemente, não estacionário.

Uma forma alternativa, como vimos na aula, o modelo é estacionário se todos os autovalores da matrix A forem menores que a unidade em valor absoluto. Os autovalores de A são 1.0 e 0.4, ou seja, um deles está sobre o círculo unitário e, conseqüentemente, o processo é não-estacionário.

Problema 2. Seja $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ modelado pelo seguinte VAR(1):

$$y_t = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} y_{t-1} + \epsilon_t$$

onde $\epsilon_t \sim N(0, \Sigma)$ e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2.25 & 0.30 \\ 0.30 & 0.64 \end{pmatrix},$$

ou seja, erros ϵ_{1t} e ϵ_{2t} dependentes.

a) Encontre l_{21} , λ_1 e λ_2 em

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

tais que $\Sigma = L\Lambda L'$ e, conseqüentemente, $L^{-1}\Sigma(L')^{-1} = \Lambda$.

b) Derive a forma estrutural (recursiva)

$$L^{-1}y_t = L^{-1}Ay_{t-1} + u_t$$

where $u_t \sim N(0, \Lambda)$, isto é, erros (ou *choques*) u_{1t} e u_{2t} independentes.

Não é difícil mostrar que

$$l_{21} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}, \quad \lambda_1 = \sigma_1^2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2),$$

onde $\rho = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$ e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

No caso do problema, segue $\rho = 0.25$, $l_{21} = 0.1333$, $\lambda_1 = 2.25$ e $\lambda_2 = 0.6$. Também segue que

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.1333 & 1 \end{pmatrix},$$

e, conseqüentemente, o modelo VAR estrutural na forma recursiva será a composição das duas equações:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 0.5y_{1,t-1} + 0.1y_{2,t-1} + u_{1t} \\ y_{2t} &= 0.1333y_{1t} + 0.3333y_{1,t-1} + 0.3667y_{2,t-1} + u_{2t}. \end{aligned}$$

Note que y_{2t} (2a equação) depende contemporaneamente de y_{1t} .

Problema 3 (Lutkepohl, 2005, Problem 2.3, page 67). In the United States of Wonderland the growth rates of income (GNP) and the money stock (M2) as well as an interest rate (IR) are related as in the following VAR(2) model

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + u_t$$

or, more explicitly,

$$\begin{pmatrix} \text{GNP}_t \\ \text{M2}_t \\ \text{IR}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{GNP}_{t-1} \\ \text{M2}_{t-1} \\ \text{IR}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{GNP}_{t-2} \\ \text{M2}_{t-2} \\ \text{IR}_{t-2} \end{pmatrix} + u_t$$

where $u_t \sim N(0, \Sigma)$ and

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.03 & 0.00 \\ 0.03 & 0.09 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.81 \end{pmatrix}$$

- Show that $y_t = (\text{GNP}_t, \text{M2}_t, \text{IR}_t)'$ is stable (*hint*: write the process in VAR(1) form).
- Determine the mean vector of y_t .
- Compute the coefficient matrices Φ_1, \dots, Φ_5 of the MA representation of y_t

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i u_{t-i}$$

Como o modelo é um VAR(2), primeiro precisamos escreve-lo como um VAR(1) estendido,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{GNP}_t \\ \text{M2}_t \\ \text{IR}_t \\ \text{GNP}_{t-1} \\ \text{M2}_{t-1} \\ \text{IR}_{t-1} \end{pmatrix}}_{y_t^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\nu^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.0 & -0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \text{GNP}_{t-1} \\ \text{M2}_{t-1} \\ \text{IR}_{t-1} \\ \text{GNP}_{t-2} \\ \text{M2}_{t-2} \\ \text{IR}_{t-2} \end{pmatrix}}_{y_{t-1}^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_t^*},$$

e encontrar os autovalores da grande matrix A . Esses são $0.910, 0.412 \pm 0.338i, 0.346, -0.179$ e 0 , sendo que $|0.412 \pm 0.338i| = 0.533$. Como todos são menores que um em valor absoluto, o processo acima é estável e, conseqüentemente, estacionário. Adicionalmente, como vimos durante as aulas, a média incondicional do processo será

$$\mu = (I_3 + A_1 + A_2)^{-1} \nu = (1.283, 0.752, -0.642)'$$

e a representação VMA(∞) será

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i u_{t-i},$$

onde $\Phi_0 = I_q$, $\Phi_i = \sum_{j=1}^i \Phi_{i-j} A_j$ para $i = 1, 2, \dots$ e $\Phi_i = 0$ para $i < 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.0 & 0.8 \end{pmatrix} \\ \Phi_2 &= \Phi_1 A_1 + \Phi_0 A_2 = \begin{pmatrix} 0.29 & 0.11 & 0.01 \\ 0.09 & 0.26 & 0.22 \\ 1.35 & 0.09 & 0.64 \end{pmatrix} \\ \Phi_3 &= \Phi_2 A_1 + \Phi_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0.072 & 0.083 & 0.029 \\ 0.261 & 0.153 & 0.242 \\ 1.341 & 0.171 & 0.521 \end{pmatrix} \\ \Phi_4 &= \Phi_3 A_1 + \Phi_2 A_2 = \begin{pmatrix} 0.0185 & 0.0514 & 0.0425 \\ 0.3825 & 0.1133 & 0.2349 \\ 1.1376 & 0.2115 & 0.4429 \end{pmatrix} \\ \Phi_5 &= \Phi_4 A_1 + \Phi_3 A_2 = \begin{pmatrix} 0.03680 & 0.03071 & 0.04744 \\ 0.42696 & 0.09887 & 0.21455 \\ 0.92673 & 0.21546 & 0.39257 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A figura 3 traz os coeficientes de Φ_i para $i = 1, 2, \dots, 50$.

Problema 4: VAR(2) Bivariado com raízes complexas. Vimos em sala que as raízes do modelo VAR(2) bivariado

$$y_t = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 0.0 \end{pmatrix} y_{t-2} + \epsilon_t.$$

são 1.3 and the pair of complex roots $3.55 \pm 4.26i$. Simule $n = 1000$ observações desse processo assumindo que $\epsilon_t \sim N(0, \Sigma)$ onde $\Sigma = 100I_2$ e $y_0 = y_{-1} = 0$. Comente sobre os comportamentos das séries temporais y_{1t} e y_{2t} .

Veja as séries temporais simuladas na Figura 4. Como esperado, são séries aparentemente estacionárias. Além disso, nota-se um *zigzag* mais evidente nas séries, correspondendo as raízes complexas (cíclicas) do VAR(2). Similarmente ao problema anterior, a figura 3 traz os coeficientes de Φ_i para $i = 1, 2, \dots, 50$.

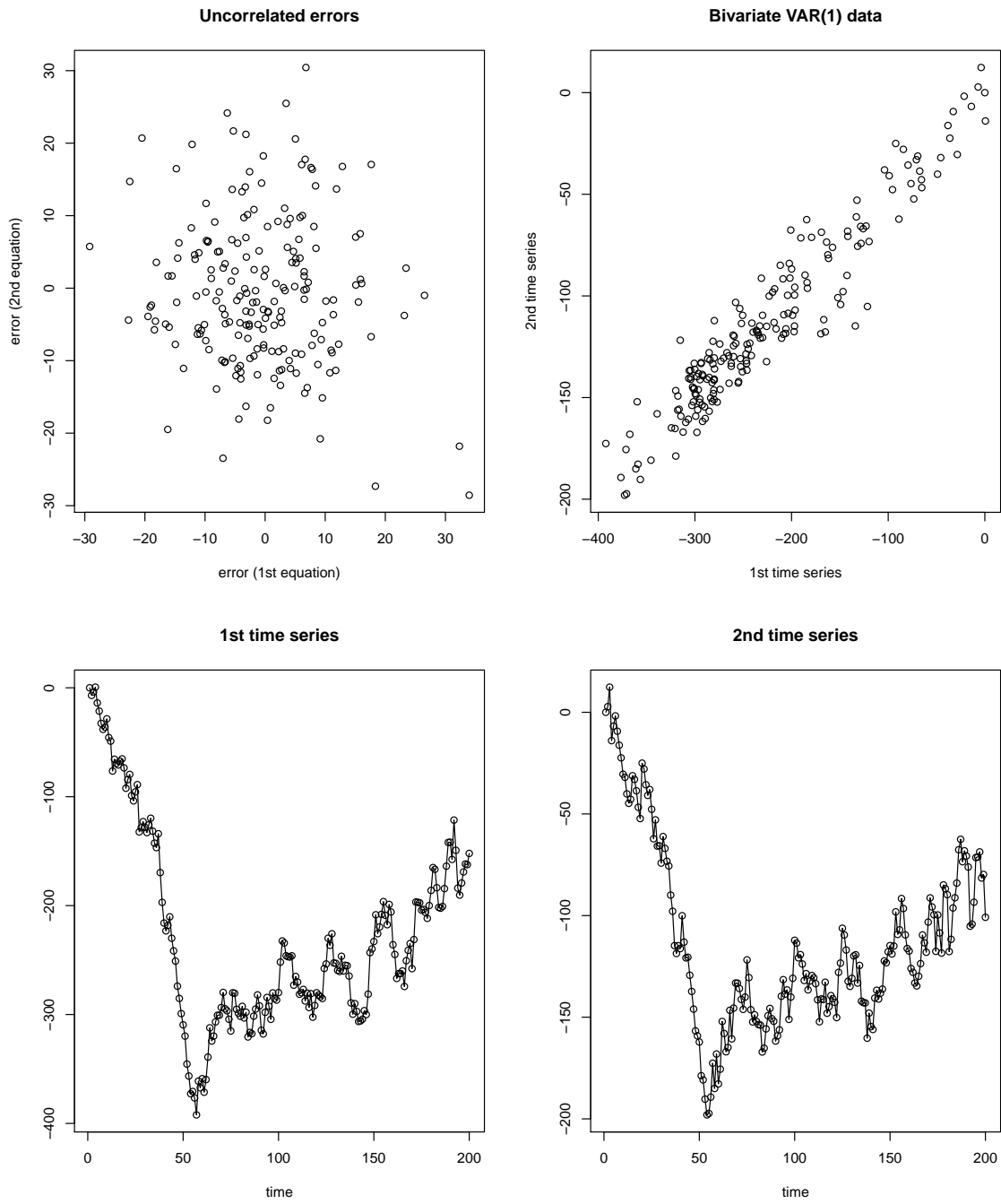


Figure 1: Simulação do VAR(1) bivariado do problema 1.

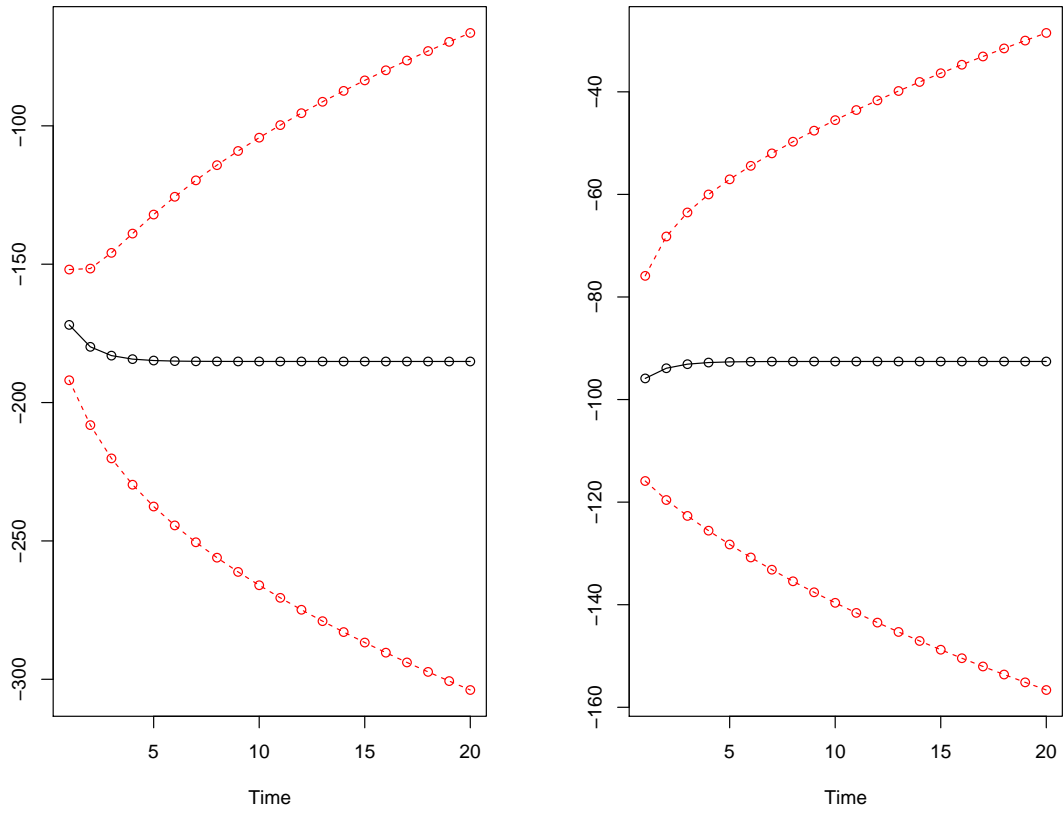


Figure 2: Previsão h -passos para o VAR(1) bivariado do problema 1.

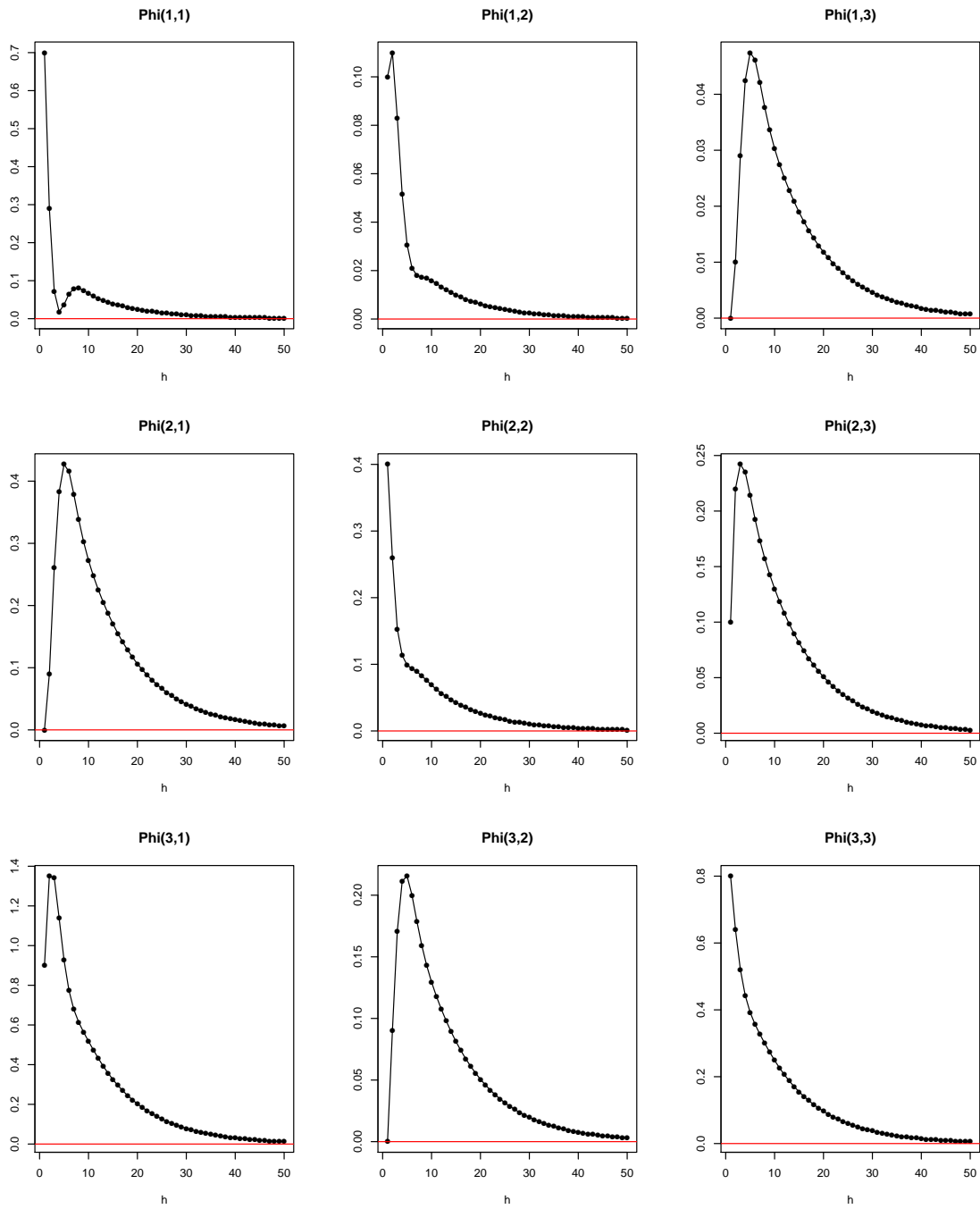


Figure 3: Matrizes de coeficientes Φ_1, \dots, Φ_{50} da representação MA de y_t do problema 3.

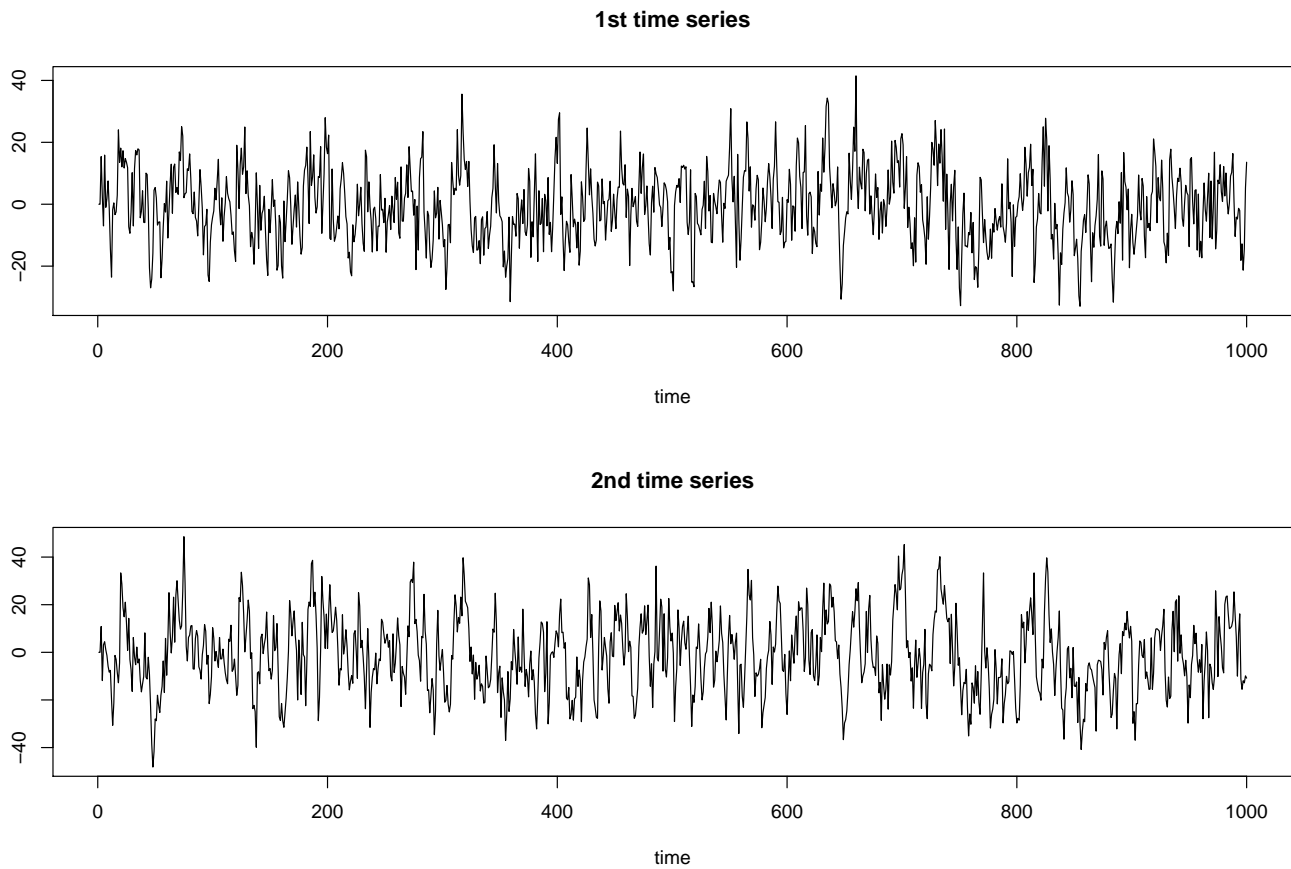


Figure 4: Simulação do VAR(2) bivariado do problema 4.

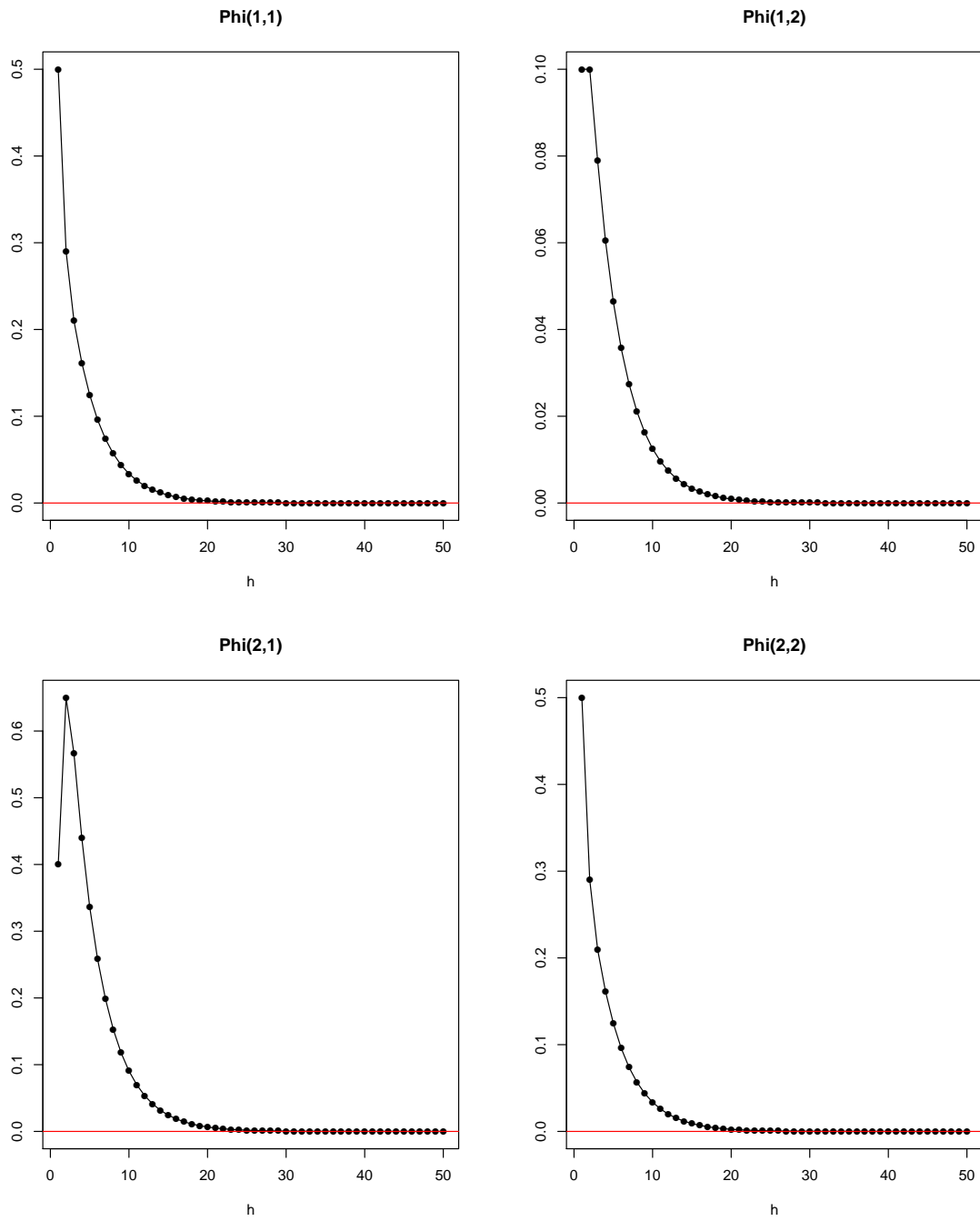


Figure 5: Matrizes de coeficientes Φ_1, \dots, Φ_{50} da representação MA de y_t do problema 4.

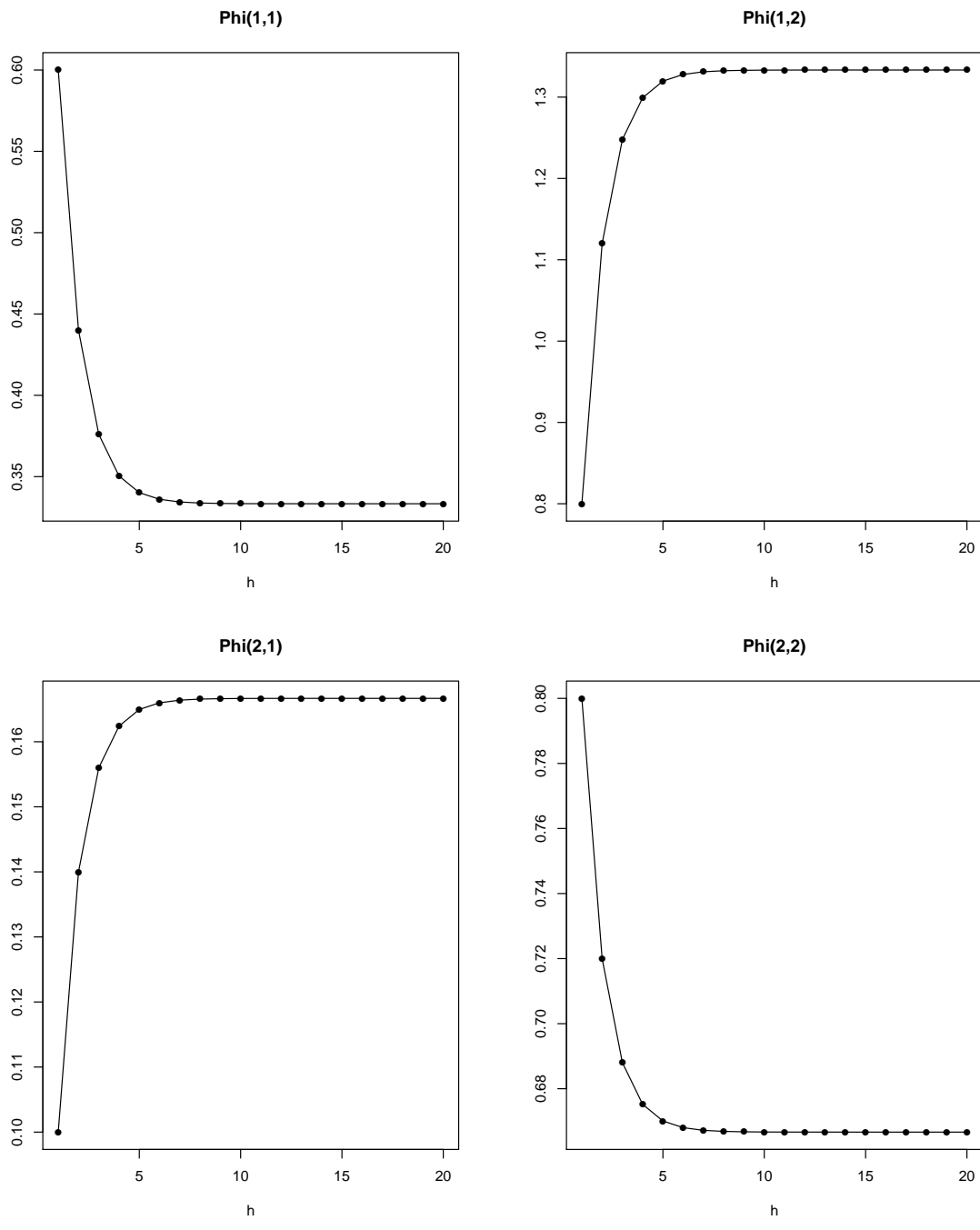


Figure 6: Matrizes de coeficientes Φ_1, \dots, Φ_{50} da representação MA de y_t do problema 1. Note que os coeficientes não convergem para zero, o que aconteceria se o processo VAR fosse estável (estacionário).