Modelos ARCH e GARCH

Aula 8

Morettin e Toloi, 2006, Capítulo 1 e 14
Morettin, 2011, Capítulo 1 e 5
Bueno, 2011, Capítulo 8

Motivação

Pesquisadores que se dedicam a prever séries temporais, tais como preços de ações, taxas de inflação, taxas de câmbio, etc., costumam observar que a capacidade dos modelos em prever tais variáveis oscila consideravelmente de um período para outro: para alguns períodos, os erros de previsão são relativamente pequenos, já para outros, tais erros são relativamente grandes, e então são outra vez pequenos para um outro período.

Motivação

Observando as expressões de cálculo dos erros de previsão:

$$
\begin{aligned}
e_T(1) &= y_{T+1} - \hat{y}_T(1) = \varepsilon_{T+1} \\
e_T(2) &= y_{T+2} - \hat{y}_T(2) = \varepsilon_{T+2} + \psi_1 \varepsilon_{T+1} \\
e_T(3) &= y_{T+3} - \hat{y}_T(3) = \varepsilon_{T+3} + \psi_1 \varepsilon_{T+2} + \psi_2 \varepsilon_{T+1} \\
&\vdots \\
e_T(h) &= y_{T+h} - \hat{y}_T(h) = \varepsilon_{T+h} + \psi_1 \varepsilon_{T+h+1} + \cdots + \psi_{h-1} \varepsilon_{T+1}
\end{aligned}
$$

não é difícil notar que tais quantidades realmente podem guardar algum tipo de relação.

Motivação

Não é difícil notar que o comportamento dos erros de previsão dependem do comportamento das perturbações ε_t.

Dessa forma, temos uma justificativa plausível para a existência de auto-correlação na variância de ε_t.

Assim, podemos observar que as variâncias dos erros de previsão não são constantes. Ou seja, há uma espécie de auto-correlação nas variâncias dos erros de previsão.

Modelos ARCH e GARCH

Para capturar a estrutura de correlação na variância condicional da inflação do Reino Unido, Engle (1982) propôs um modelo denominado como ARCH (Modelo Autorregressivo para a Heteroscedasticidade Condicional), que é um exemplo de modelo não-linear.

Uma generalização do modelo ARCH foi sugerida por Bollerslev (1986, 1987, 1988), o chamado modelo GARCH (generalized ARCH), que pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH.

Objetivos

Assim, nesta parte da disciplina o objetivo será modelar o que se chama de volatilidade, que é a variância condicional de uma variável, comumente de um retorno.

Embora não seja medida diretamente, a volatilidade manifesta-se de várias maneiras numa série financeira e nós a trataremos a partir de uma abordagem estatística, que modela diretamente a volatilidade da série de retornos usando alguma classe de modelos como, por exemplo, o GARCH.

Fatos estilizados sobre os retornos

(a) Retornos são, em geral, não auto-correlacionados;

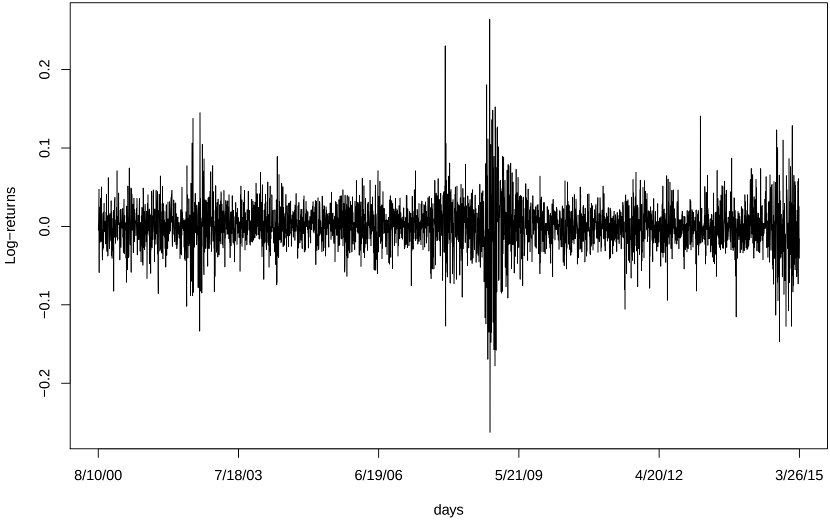
(b) Séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo;

(c) Os quadrados dos retornos são auto-correlacionados, apresentando uma correlação de lag 1 pequena e depois uma queda lenta das demais;

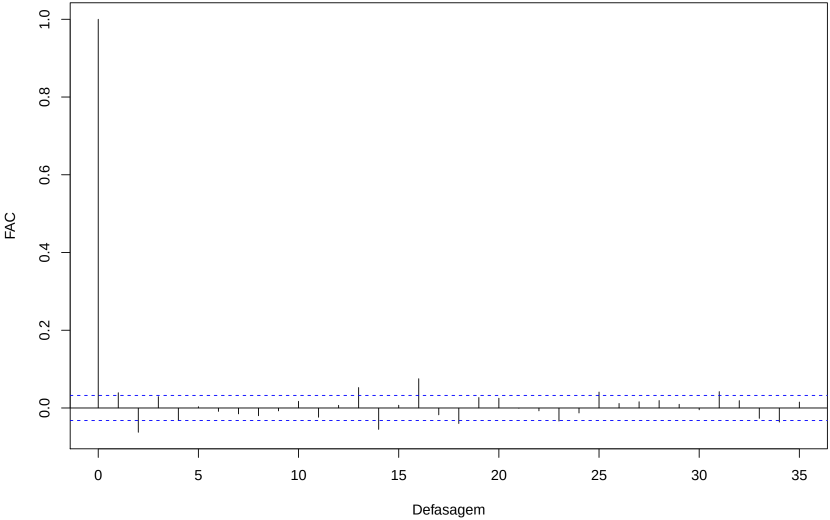
(d) A distribuição (incondicional) dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que as caudas de uma distribuição normal; além disso, a distribuição, embora aproximadamente simétrica, é, em geral, leptocúrtica;

(e) Algumas séries de retornos são não-lineares.

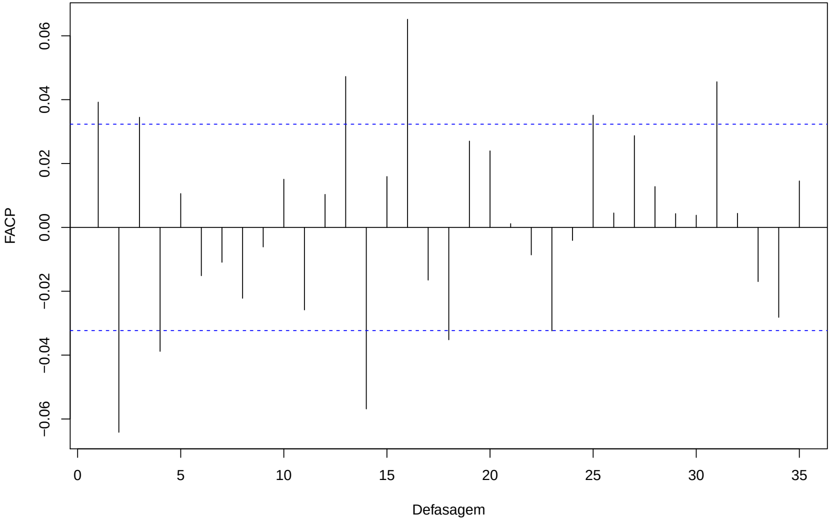
Petrobras (PBR/NYSE) - 11/08/00 - 27/03/15 (3678 obs)



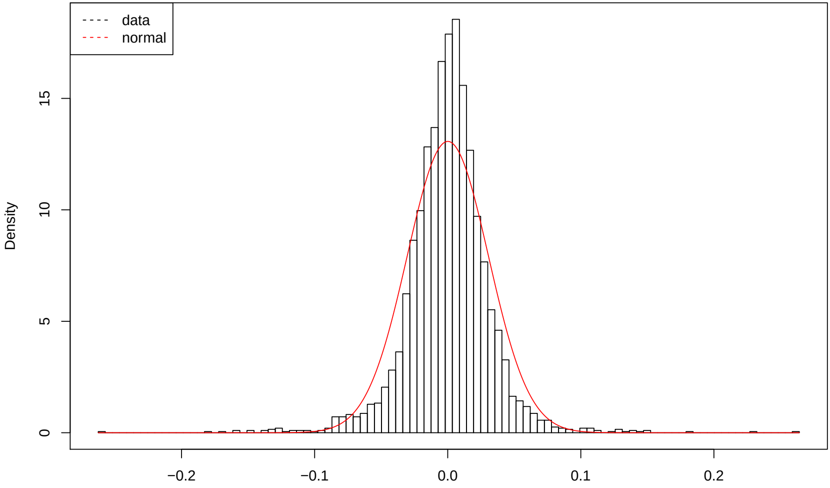
Função de autocorrelação



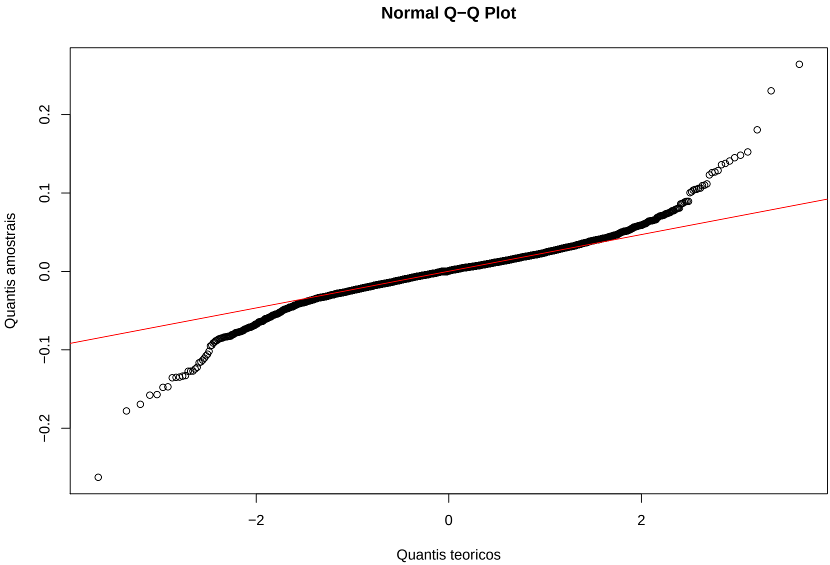
Função de autocorrelação parcial



Normalidade ou não?



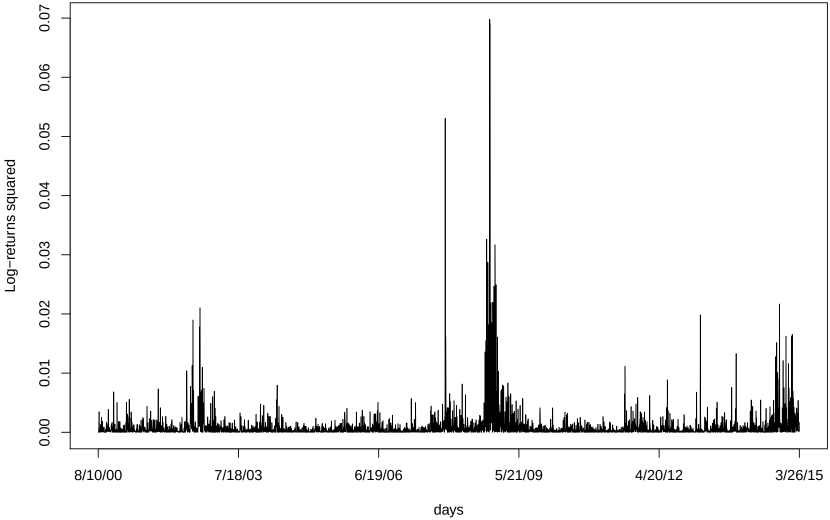
Normalidade ou não?



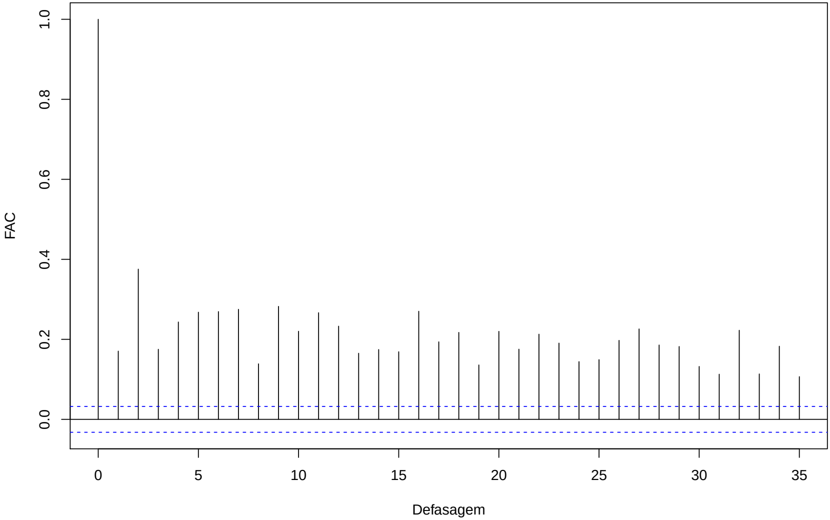
Estatísticas básicas

Média	0.00008045
Mediana	0.00065148
Mínimo	-0.2625885
Máximo	0.2641932
Desvio Padrão	0.0305223
Assimetria	-0.1103535
Excesso de curtose	7.379875

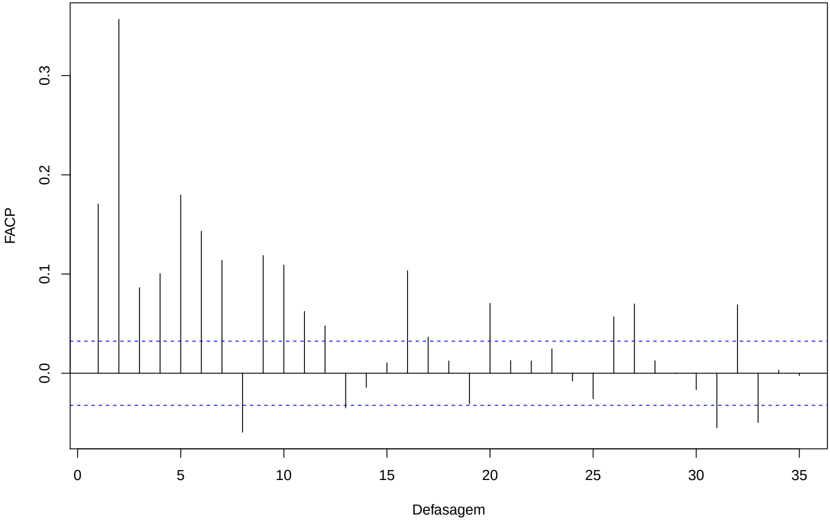
Quadrados dos log-retornos



Quadrados dos log-retornos - FAC



Quadrados dos log-retornos - FACP



Modelos não-lineares

Na análise de modelos não-lineares as inovações (choques aleatórios) ε_t são, em geral, supostas i.i.d e o modelo tem a seguinte forma

$$r_t = \mu(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) + \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)\varepsilon_t,$$

de mode que

- $\mu(\cdot)$ representa a função média condicional; e
- $\sigma^2(\cdot)$ representa a função variância condicional.

Se $\mu(\cdot)$ for não-linear $\Rightarrow$ modelo não-linear na média.

Se $\sigma^2(\cdot)$ for não-linear $\Rightarrow$ modelo não-linear na variância.

Média e variância condicionais de r_t

- Considere r_t uma série de log-retornos.
- $\Im_{t-1} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{t-1}\}$ denota toda a informação até $t-1$.
- A média condicional de r_t é dada por

$$\mu_t = E(r_t|\Im_{t-1}) = E_{t-1}(r_t).$$

- A variância condicional de r_t é dada por

$$\sigma_t^2 = E[(r_t - \mu_t)^2|\Im_{t-1}] = E_{t-1}[(r_t - \mu_t)^2].$$

- Se $\mu_t = 0$, então $\sigma_t^2 = E[r_t^2|\Im_{t-1}] = E_{t-1}[r_t^2]$

Notação

Um modelo típico para a volatilidade é da forma

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$$

em que

$$E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0$$

e

$$Var_{t-1}(\varepsilon_t) = 1$$

e tipicamente ε_t é uma sequência i.i.d. com certa distribuição.

Obs: A média e a variância incondicionais de r_t serão denotadas por

$$\mu = E(r_t) \quad \text{e} \quad \sigma^2 = Var(r_t),$$

respectivamente.

ARCH(m)

Um modelo ARCH(m) é definido por

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

onde $\varepsilon_t \sim IID(0,1)$ e com variância condicional

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m r_{t-m}^2$$

em que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m-1$ e $\alpha_m > 0$.

r_t^2 é AR(m)

Definindo $v_t = r_t^2 - \sigma_t^2$ e substituindo em

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m r_{t-m}^2,$$

obtemos

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m r_{t-m}^2 + v_t.$$

Portanto:

- r_t^2 segue um processo AR(m).
- $v_t = r_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)$ é não Gaussiano, mesmo quando $\varepsilon_t \sim NID(0, 1)$.

Observações

Na prática, usualmente é suposto que os erros ε_t sigam uma distribuição, N(0,1).

Ou ainda t-Student, t_ν, com baixo graus de liberdade ν, ou alguma distribuição que descreva melhor as caudas pesadas de séries financeiras.

Os coeficientes α_i devem satisfazer certas condições, dependendo do tipo de imposição que colocamos sobre o processo r_t.

Pela própria definição, valores grandes de r_t são seguidos por outros valores grandes da série.

GARCH(m,n)

A variância condicional de modelo GARCH(m,n) é definida por

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

em que $\alpha_0 > 0$,

- $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots m-1$ e $\alpha_m > 0$,
- $\beta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots n-1$ e $\beta_n > 0$,
- Para $q = max(m, n)$

$$\sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + \beta_i) < 1.$$

Coeficientes positivos dão uma condição suficiente, mas não necessária, para que $\sigma_t^2 > 0$ (Nelson & Cao, 1992).

Como no caso de modelos ARCH, usualmente trabalhamos com a suposição de que os ε_t sejam normais ou t-Student, ou ainda, uma distribuição de erro generalizada.

r_t^2 é AR(q,n)

Definindo $v_t = r_t^2 - \sigma_t^2$ e substituindo em

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

obtemos

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_{t-j} + v_t$$

Portanto:

- r_t^2 segue um processo AR(q,n).
- v_t não é, em geral, um processo i.i.d.

Modelo ARCH(1)

Para investigarmos algumas propriedades dos modelos ARCH(m), vamos considerar o caso especial onde $m = 1$. Ou seja,

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

com erro $\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$ e variância condicional

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2$$

e parâmetros $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1 > 0$.

Média e variância incondicionais

Não é difícil verificar que

$$E(r_t) = E[E(r_t|\Im_{t-1})] = E[E(\sigma_t \varepsilon_t|\Im_{t-1})] = E[\sigma_t \underbrace{E(\varepsilon_t|\Im_{t-1})}_{=0}] = 0,$$

e que $Var(r_t) = E(r_t^2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} E(r_t^2) &= E[E(r_t^2|\Im_{t-1})] = E[E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2|\Im_{t-1})] \\ &= E[\sigma_t^2 \underbrace{E(\varepsilon_t^2|\Im_{t-1})}_{=1}] = E(\sigma_t^2) \\ &= E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2). \end{aligned}$$

Restrição adicional: $0 < \alpha_1 < 1$

Se o processo r_t for estacionário de segunda ordem, então, para todo t e k, segue que $E(r_t^2) = E(r_{t-k}^2)$.

Se μ e σ^2 são média e variância incondicionais do processo r_t, então

$$\sigma^2 = E(r_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2$$

e, consequentemente a variância incondicional de r_t é

$$Var(r_t) = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1},$$

implicando que $\alpha_0 > 0$ e $0 < \alpha_1 < 1$.

Covariâncias incondiconais

$$\begin{aligned} Cov(r_t, r_{t+k}) &= E(r_t r_{t+k}) = E[E(r_t r_{t+k}|\Im_{t+k-1})] \\ &= E[r_t E(r_{t+k}|\Im_{t+k-1})] = E[r_t E(\sigma_{t+k}\varepsilon_{t+k}|\Im_{t+k-1})] \\ &= E[r_t \sigma_{t+k} \underbrace{E(\varepsilon_{t+k}|\Im_{t+k-1})}_{=0}] = 0 \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$.

Poranto, r_t é uma sequncia de variáveis não correlacionadas (ruído branco), com média zero e variância dada por $\alpha_0/(1-\alpha_1)$.

Curtose maior que 3

Um dos fatos estilizados é que os retornos apresentam geralmente caudas mais longas, de modo que a curtose é maior do que 3.

A curtose, supondo que $r_t \sim$ ARCH(1) com $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, é dada por

$$K = \frac{E(r_t^4)}{[Var(r_t)]^2} = 3\left(\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right) > 3$$

Vemos, pois, que se admitirmos que r_t siga um modelo ARCH, as caudas serão mais pesadas do que as da normal, o que é uma propriedade vantajosa do modelo.

GARCH(1,1)

Um modelo bastante usado na prática é o GARCH(1,1), para o qual a volatilidade conditional é expressa como

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

com $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1, \beta_1 \in (0, 1)$.

Para os modelos GARCH temos as mesmas vantagens e desvantagens dos modelos ARCH:

- Volatilidades altas são precedidas de retornos ou volatilidades grandes, observando-se os grupos de volatilidades presentes em séries financeiras;
- Retornos positivos e negativos são tratados de forma similar, já que quadrados dos retornos entram na fórmula da volatilidade.

Curtose maior que 3

A curtose, supondo que $r_t \sim$ GARCH(1,1) com $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, é dada por

$$K = \frac{E(r_t^4)}{[E(r_t^2)]^2} = 3\left(\frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2}\right) > 3$$

Vemos, pois, que se admitirmos que r_t siga um modelo GARCH, as caudas serão mais pesadas do que as da normal, o que é uma propriedade vantajosa do modelo.

Variância incondicional

É fácil provar que, supondo que $r_t \sim$ GARCH(1,1) com $\varepsilon_t \sim (0, 1)$, a variância incondicional de r_t é

$$Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)},$$

portanto $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ é uma restrição adicional.

No longo prazo, a volatilidade convergirá para tal zresultado incondicional.

ARCH/GARCH no R

```
install.packages("fGarch")

library(fGarch)

data = read.csv("petrobras.csv",header=TRUE)

y = diff(log(as.numeric(data[,2])))

fit.arch = garchFit(~garch(1,0),data=y,trace=F,include.mean=FALSE)

fit.garch = garchFit(~garch(1,1),data=y,trace=F,include.mean=FALSE)
```

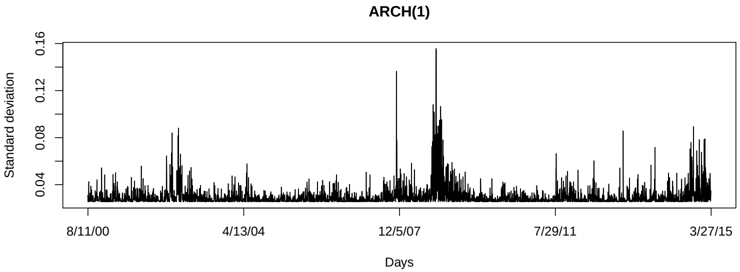
fit.arch

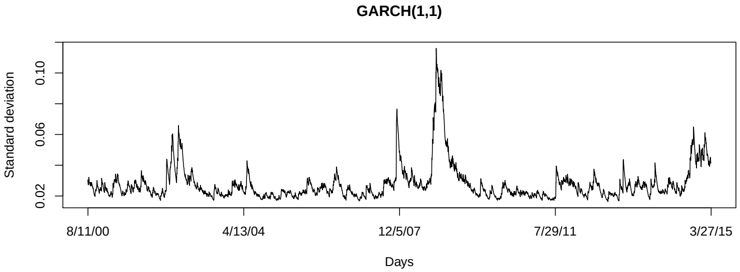
```
Title: GARCH Modelling

Conditional Distribution: norm

        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega  6.440e-04   2.043e-05    31.52   <2e-16 ***
alpha1 3.388e-01   3.142e-02    10.78   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Log Likelihood:
 7793.993    normalized:  2.119085
```

fit.arch

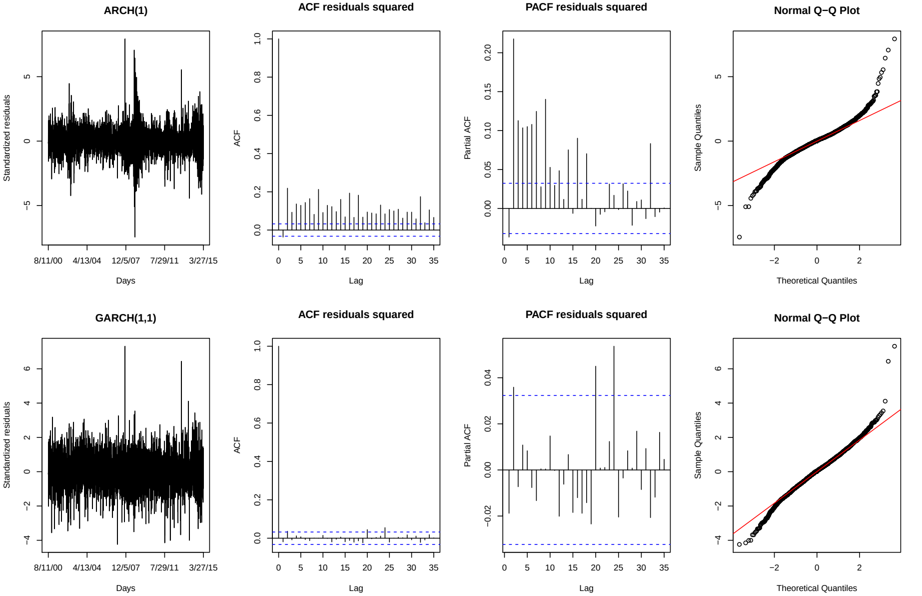
```
Title: GARCH Modelling

Conditional Distribution: norm

        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega  1.473e-05   3.152e-06    4.673 2.96e-06 ***
alpha1 7.197e-02   8.042e-03    8.949  < 2e-16 ***
beta1  9.100e-01   1.010e-02   90.127  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Log Likelihood:
 8179.795    normalized:  2.223979
```

Fitted standard deviations





Residual analysis



Ljung-Box statistic

```
Box.test(res.arch^2,lag=10,type='Ljung')

# Box-Ljung test
# data:  res.arch^2
# X-squared = 742.0735, df = 10, p-value < 2.2e-16

Box.test(res.garch^2,lag=10,type='Ljung')

# Box-Ljung test
# data:  res.garch^2
# X-squared = 8.7553, df = 10, p-value = 0.5555
```

Unconditional variances and kurtosis

```
#                 Sample      ARCH(1)   GARCH(1,1)
#Variance 0.0009316083 0.0009740429 0.0008170309
#St.Dev.  0.0305222590 0.0312096596 0.0285837524
#Kurtosis 4.3625780142 4.0506396090 4.2243098902
```