ECONOMETRIA AVANÇADA
Prova Intermediária - 09/04/2015
**Solução**

**Questão I (2,0 pontos):** Para o modelo $y_t = 0,7y_{t-1} + \epsilon_t$, com ruído branco $\epsilon_t \sim (0,1)$,

**(a) (0,5)** Obtenha a previsão $h$-passos a frente, $\widehat{y}_t(h)$, para $h = 1,2,3,100$, e

**(b) (0,5)** Obtenha a variância da previsão $h$-passos a frente, $V_t(h)$, para $h = 1,2,3,100$.

Se o modelo anterior fosse verdadeiro e baseando-se numa amostra de tamanho $n = 100$,

**(c) (0,5)** Seria uma surpresa se a primeira autocorrelação amostral fosse $r_1 = 0,6$? Explique.

**(d) (0,5)** Seria inesperado observar a décima autocorrelação amostral $r_{10} = -0,15$? Explique.

Como o processo é um AR(1) estacionário, $y_t = 0,7y_{t-1} + \epsilon_t$, podemos reescrever $y_{t+h}$, para qualquer $h \geq 1$, como função de $y_t$ e erros futuros. Para $h = 1,2,3$, é simples ver que

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= 0,7y_t + \epsilon_{t+1} \\ y_{t+2} &= (0,7)^2 y_t + 0,7\epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} \\ y_{t+3} &= (0,7)^3 y_t + (0,7)^2\epsilon_{t+1} + (0,7)\epsilon_{t+2} + \epsilon_{t+3} \end{aligned}$$

Consequentemente, para $h \geq 1$, segue que

$$y_{t+h} = (0,7)^h y_t + (0,7)^{h-1}\epsilon_{t+1} + (0,7)^{h-2}\epsilon_{t+2} + \cdots + (0,7)^2\epsilon_{t+h-2} + 0,7\epsilon_{t+h-1} + \epsilon_{t+h}$$

**(a)** Portanto, depois de observar $y_1, \ldots, y_t$, a previsão $h$ passos a frente é dada por

$$\widehat{y}_t(h) = E(y_{t+h}|y_t) = (0,7)^h y_t,$$

e $\widehat{y}_t(1) = 0,7y_t$, $\widehat{y}_t(2) = 0,49y_t$, $\widehat{y}_t(3) = 0,343y_t$ e $\widehat{y}_t(100) = 3,234477 \times 10^{-16} y_t$.

**(b)** Similarlmente, a variância da previsão $h$-passos a frente é dada por

$$V_t(h) \;=\; V(y_{t+h}|y_t) = \{1 + (0,7)^2 + (0,7)^4 + \cdots + (0,7)^{2(h-1)}\},$$

com $V_t(1) = 1,00$, $V_t(2) = 1,49$, $V_t(3) = 1,7301$ e $V_t(100) \approx 1/(1-0,7^2) = 1,960784$.

**(c)** Para uma amostra de tamanho $n = 100$, não podemos de forma definitiva dizer que $r_1 = 0,6$ é uma surpresa, uma vez que o verdadeiro valor seria $\rho_1 = 0,7$. Em outras palavras, o tamanho amostral é relativamente pequeno para nos dar "certeza" de que o valor estimado $r_1 = 0,6$ não está próxido estatisticamente do valor verdadeiro $\rho_1 = 0,7$.

**(d)** Similarmente, o verdadeiro valor da autocorrelação de ordem 10 é $\rho_{10} = (0,7)^{10} = 0,028$, que não está muito longe da décima autocorrelação amostral $r_{10} = -0,15$ se considerarmos o desvio-padrão $1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{100} = 0,1$.

**Questão II (1,0 pontos):** Considere o modelo SARIMA$(0,1,2)\times(0,1,1)_{12}$:

$$\Delta\Delta_{12}y_t = (1-\Theta L^{12})(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)\epsilon_t.$$

**(a) (0,5)** Escreva o modelo na forma de um modelo ARMA.

**(b) (0,5)** Qual a ordem do modelo ARMA resultante?

É fácil verificar que

$$\begin{aligned}\Delta\Delta_{12}y_t &= y_t - y_{t-1} - y_{t-12} + y_{t-13}\\ (1-\Theta L^{12})(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2) &= 1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\Theta L^{12}+\Theta\theta_1 L^{13}+\Theta\theta_2 L^{14}.\end{aligned}$$

**(a)** O modelo pode ser escrito na forma ARMA:

$$y_t = y_{t-1}+y_{t-12}-y_{t-13}+\epsilon_t-\theta_1\epsilon_{t-1}-\theta_2\epsilon_{t-2}-\Theta\epsilon_{t-12}+\Theta\theta_1\epsilon_{t-13}+\Theta\theta_2\epsilon_{t-14},$$

**(b)** $y_t$ segue um processo ARMA(13,14) com várias restrições nos coeficientes AR e MA.

**Questão III (prova salmão):** Considere o modelo SARIMA$(1,1,2)\times(0,1,0)_{12}$:

$$(1-\phi L)\Delta\Delta_{12}y_t = (1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)\epsilon_t.$$

**(a) (0,5)** Escreva o modelo na forma de um modelo ARMA.

**(b) (0,5)** Qual a ordem do modelo ARMA resultante?

É fácil verificar que

$$\begin{aligned}(1-\phi L)\Delta\Delta_{12}y_t &= (1-\phi L)(y_t - y_{t-1} - y_{t-12} + y_{t-13})\\ &= y_t-(1+\phi)y_{t-1}+\phi y_{t-2}-y_{t-12}+(1+\phi)y_{t-13}-\phi y_{t-14}\\ (1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)\epsilon_t &= \epsilon_t-\theta_1\epsilon_{t-2}-\theta_2\epsilon_{t-2}.\end{aligned}$$

**(a)** O modelo pode ser escrito na forma ARMA:

$$y_t = (1+\phi)y_{t-1}-\phi y_{t-2}+y_{t-12}-(1+\phi)y_{t-13}+\phi y_{t-14}+\epsilon_t-\theta_1\epsilon_{t-2}-\theta_2\epsilon_{t-2}.$$

**(b)** $y_t$ segue um processo ARMA(14,2) com várias restrições nos coeficientes AR.

**Questão III (3,0 pontos):** Como vimos repetidamente nas aulas, é importante entender o significado do termo constante em um modelo de séries temporais. Para cada um dos modelos abaixo, qual o significado do termo constante $\mu$? Em todos os casos $\epsilon_t$ é ruído branco.

**(a) (1,0)** $y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}$.

**(b) (1,0)** $y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$, para $|\phi| < 1$.

**(c) (1,0)** $y_t = \mu + y_{t-1} + \epsilon_t$.

**(a)** Para processos MA(q), $y_t = \mu + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$, o termo constante (ou intercepto) é simplesmente a média incondicional da série:

$$E(y_t) = \mu.$$

**(b)** Para processos ARMA(p,q) estacionários, $y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$, o termo constante (ou intercepto) está diretamente relacionado à média incondicional de $y_t$:

$$E(y_t) = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}.$$

Portanto, no caso acima (AR(1) estacionário, pois $|\phi| < 1$),

$$E(y_t) = \frac{\mu}{1 - \phi}.$$

**(c)** Quando $y_t$ é um passeio aleatório com *drift*, o termo constante (ou intercepto) se torna a inclinação determinística de $y_t$ (como discutimos várias vezes nos últimos 2 meses):

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= 2\mu + \epsilon_t + \epsilon_{t-1} \\ &= 3\mu + \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \mu t + \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \cdots + \epsilon_1, \end{aligned}$$

isto é,

$$E(y_t) = \mu t.$$

**Questão IV (2,5 pontos):** Determine quais dos seguintes processos ARMA são estacionários e quais são inversíveis (em todos os casos $\epsilon_t$ é ruído branco). Justifique seus resultados.

**(a)(1,0)** $y_t + 0,2y_{t-1} - 0,48y_{t-2} = \epsilon_t$

**(b)(1,5)** $y_t + 1,6y_{t-1} = \epsilon_t - 0,4\epsilon_{t-1} + 0,04\epsilon_{t-2}$

**ARMA(p,q):** Relembrando o processo ARMA(p,q) com intercepto pode ser escrito por:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)y_t = \mu + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_q L^q)\epsilon_t,$$

onde $\epsilon_t$ é um processo ruído branco. O processo é estacionário se todas as raízes do polinômio $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$ estiverem fora do círculo unitário. O processo é inversível se todas as raízes do polinômio $1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \cdots - \theta_q z^q$ estiverem fora do círculo unitário.

**AR(1), AR(2) e MA(2):** Os casos acima só apresentam $p, q \leq 2$, portanto estacionariedade e inversibilidade podem ser verificadas diretamente através dos coeficientes $\phi$s e $\theta$s. Para o processo AR(1) ser estacionário basta que $|\phi_1| < 1$. Similarmente, para o processo AR(2) ser estacionário basta que $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ e $|\phi_2| < 1$. Similarmente, para o processo MA(2) ser inversível basta que $\theta_1 + \theta_2 < 1$, $\theta_2 - \theta_1 < 1$ e $|\theta_2| < 1$.

**Estacionariedade:**

- (a) As raízes do polinômio do 2º grau $(1 + 0,2z - 0,48z^2)$ são 1.667 e $-1,25$ e estão fora do círculo unitário. Alternativamente, $\phi_1 = -0,2$ e $\phi_2 = 0,48$, com $\phi_1 + \phi_2 = 0,28 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 = 0,68 < 1$ e $|\phi_2| = 0,48 < 1$. Portanto $y_t$ é estacionário.
- (b) A raíz do polinômio do 1º grau $(1 + 1,6z)$ é $-0,625$ e está dentro do círculo unitário. Alternativamente, $\phi_1 = 1.6 > 1$. Portanto $y_t$ é não-estacionário.

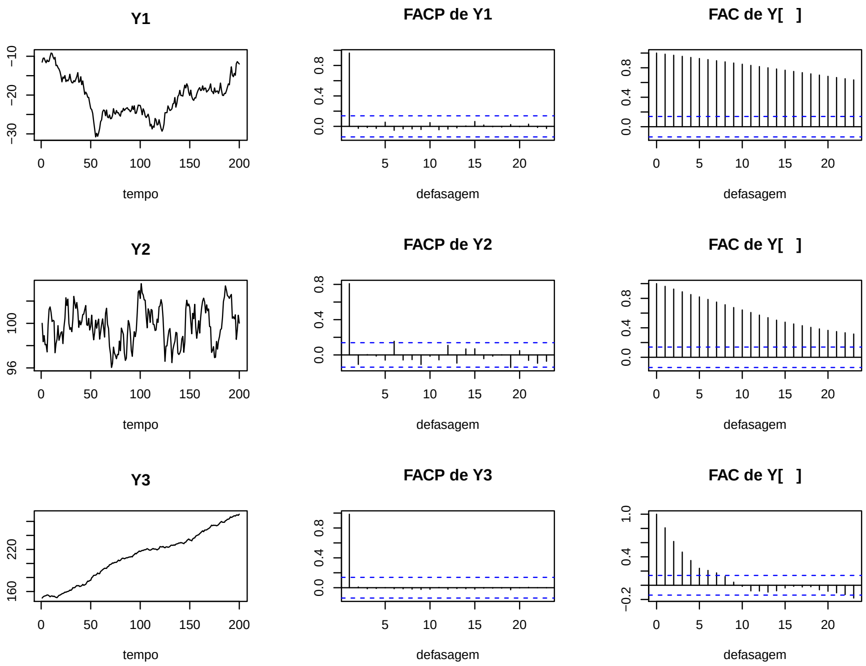
**Inversibilidade:**

- (a) $y_t$ é naturalmente inversível.
- (b) As raízes do polinômio do 2o grau $(1 - 0,4z + 0,04z^2)$ são idênticas e iguals a $5,0$ e está fora do círculo unitário. Alternativamente, $\theta_1 = -0,4$ e $\theta_2 = 0,04$, com $\theta_1 + \theta_2 = -0,36 < 1$, $\theta_2 - \theta_1 = 0,44 < 1$ e $|\phi_2| = 0,04 < 1$. Portanto $y_t$ é inversível.

**Conclusão:**
**(a)** $y_t$ é estacionário e inversível.
**(b)** $y_t$ é não-estacionário e inversível.

**Questão V (1,5 pontos):** As 3 séries temporais abaixo seguem processos AR(p).

**(a) (0,6)** Identifique as funções de autocorrelações (FAC) das séries na terceira coluna.




**(b) (0,9)** Sugira (e justifique) a ordem de cada AR e a presença (ou não) do termo constante.

**(a)** As FACs são (de cima para baixo) de $Y3$, $Y1$ e $Y2$. Poderia existir alugma dúvida com relação a $Y1$ e $Y3$, pois em ambos os casos as FACs demoram de forma parecida. Entretanto, a FAC to canto direito superior parece ser de um processo AR(1) com coeficiente auto-regressivo bem próximo de 1. Aliás, os três processos são AR(1) pois todas as FACPs são estatisticamente nulas depois da primeira defasagem.

**(b)** Modelos AR(1): Em todos os casos, FACP+FAC sugerem $y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$.

- **Y1:** Com $\phi \approx 1$ e $\mu = 0$ (senão teria que ficar muito próximo a $Y3$).
- **Y2:** Com $\phi < 1$ e $\mu \neq 0$ (média $\mu/(1-\phi)$ está em torno de 100).
- **Y3:** Com $\phi = 1$ e $\mu \neq 0$ (tendência $\mu t$).

# Análise da prova

A média da prova intermediária foi 5,6, enquanto mínimo e máximo foram 1,5 e 10,0, respectivamente.

| Percentil | 10% | 25% | 50% | 75% | 90% |
|---|---|---|---|---|---|
| Nota | 3,4 | 4,3 | 5,2 | 6,8 | 8,8 |

Os três quartis por questão (na escala 0-10) estão abaixo:

| Quartil | Questão 1 | Questão 2 | Questão 3 | Questão 4 | Questão 5 | Nota |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25% | 2,5 | 0,0 | 3,3 | 6,0 | 5,3 | 4,3 |
| 50% | 3,8 | 0,0 | 5,0 | 10,0 | 8,0 | 5,2 |
| 75% | 6,3 | 5,0 | 7,1 | 10,0 | 9,3 | 6,8 |

As correlações entre as questões e a nota estão abaixo:

| | Questão 1 | Questão 2 | Questão 3 | Questão 4 | Questão 5 | Nota |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Questão 1 | 1.00 | | | | | |
| Questão 2 | 0.29 | 1.00 | | | | |
| Questão 3 | 0.40 | 0.31 | 1.00 | | | |
| Questão 4 | 0.30 | 0.30 | 0.15 | 1.00 | | |
| Questão 5 | 0.20 | 0.13 | 0.25 | 0.21 | 1.00 | |
| Nota | 0.69 | 0.57 | 0.77 | 0.61 | 0.47 | 1.00 |