Econometria Avançada - 2015-1 Terceira lista de exercícios

Problema 1. Seja r_t os retornos (ou log-retornos) diários de um ativo financeiros (por exemplo, S&P500 ou Petrobrás ON) tal que

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

onde ε_t e σ_t são independentes e $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$. Portanto r_t também é normal com $E(r_t) = 0$ e $V(r_t) = E(r_t^2) = E(\sigma_t^2)$. Ou seja, apesar da média condicional de r_t ser zero, sua variância condicional é σ_t e pode variar no tempo, um fato comumente observado em séries temporais financeiras.

A curtose de r_t, denotada aqui por K_{r_t}, mede o peso das caudas da distributição de r_t e é dada por

$$K_{r_t} = \frac{E(r_t^4)}{\{E(r_t^2)\}^2} = \frac{E(\sigma_t^4)E(\varepsilon_t^4)}{\{E(\sigma_t^2)\}^2} = 3\frac{E(\sigma_t^4)}{\{E(\sigma_t^2)\}^2} = 3K_{\sigma_t}$$

uma vez que a curtose da normal é sempre igual a 3. Portanto, para se obter a curtose de r_t basta obter a curtose de σ_t. Obtenha a curtose de r_t para cada um dos casos abaixo:

a) ARCH(1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2$.

b) GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$.

c) SV-AR(1): $\log \sigma_t^2 = \mu + \phi(\log \sigma_{t-1}^2 - \mu) + u_t$, onde $u_t \sim N(0, \tau^2)$.

O estudante mais curioso pode se divertir lendo o artigo "Persistence and Kurtosis in GARCH and Stochastic Volatility Models" de Carnero, Peña & Ruiz (2004) *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 319-342, que pode ser *downloaded* do seguinte sítio:
`http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/dpena/articles/jfeCPR04proofs.pdf`

Problema 2. Mostre que se $r_t \sim$ ARCH(2) normal, então $r_t^2 \sim$ AR(2) com inovações não-normais. Mostre também que $\{r_t\}$ é uma sequência de ruídos brancos.

Problema 3. Suponha que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sejam observações de uma série de log-retornos seguindo um modelo AR(1)-GARCH(1,1) normal, isto é,

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \phi r_{t-1} + u_t, \\ u_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

para $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$. Perceba que o modelo acima pode ser mais compatamente escrito como

$$\begin{aligned} r_t | r_{t-1}, \sigma_t &\sim N(\mu + \phi_1 r_{t-1}, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu - \phi r_{t-2})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

o que evidencia a normalidade dos log-retornos r_t e também que σ_t^2 depende de r_{t-1}^2, r_{t-2}^2 e σ_{t-1}^2. Obtenha a função de log-verossimilhança condicional de $(\mu, \phi, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Sem perda de generalidade, assuma que $\sigma_0^2 = r_0 = r_{-1} = 0$.

Problema 4. O arquivo `sp500.csv` contém preços diários do S&P500 para o período de 03/01/1950 a 23/04/2015 (16432 observações). Veja a figura 1 com os dados.

a) Ajuste modelos ARCH(1), GARCH(1,1) e SV-AR(1) para essa série temporal financeira. Mais precisamente, para $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$, onde ε_t e σ_t são independentes e $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, ajuste os modelos

   a1) ARCH(1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2$.

   a2) GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$.

   a3) SV-AR(1): $\log \sigma_t^2 = \mu + \phi(\log \sigma_{t-1}^2 - \mu) + u_t$, onde $u_t \sim N(0, \tau^2)$.

   Veja os resultados na próxima página e nas figuras 2 a 3.

```
ARCH(1)
Parameter        Estimate      Std. Error
   alpha0    6.518712e-05    9.616782e-07
   alpha1    3.118930e-01    1.465707e-02

GARCH(1,1)
Parameter        Estimate      Std. Error
   alpha0    8.116538e-07    9.956670e-08
   alpha1    8.055070e-02    4.198828e-03
    beta1    9.127400e-01    4.483739e-03

SV-AR(1)
             mu    phi  sigma
1st Qu.  -9.806 0.9844 0.1404
Median   -9.752 0.9857 0.1449
Mean     -9.752 0.9856 0.1453
3rd Qu.  -9.700 0.9869 0.1497

VARIANCE, STANDARD DEVIATION AND KURTOSIS

             Sample   ARCH(1)  GARCH(1,1)  SV-AR(1)
Variance  0.0000944 0.0000947   0.0001210 0.0000583
St.Dev.   0.0097164 0.0097331   0.0109988 0.0076381
Kurtosis 24.6164182 3.8241874 101.1132664 6.3648994
```

b) Divida a série em grupos de 5 anos (13 grupos, portanto) e repita as análises de a). Como se comportam os parâmetros dos modelos ao longo do tempo? Comente seus resultados.

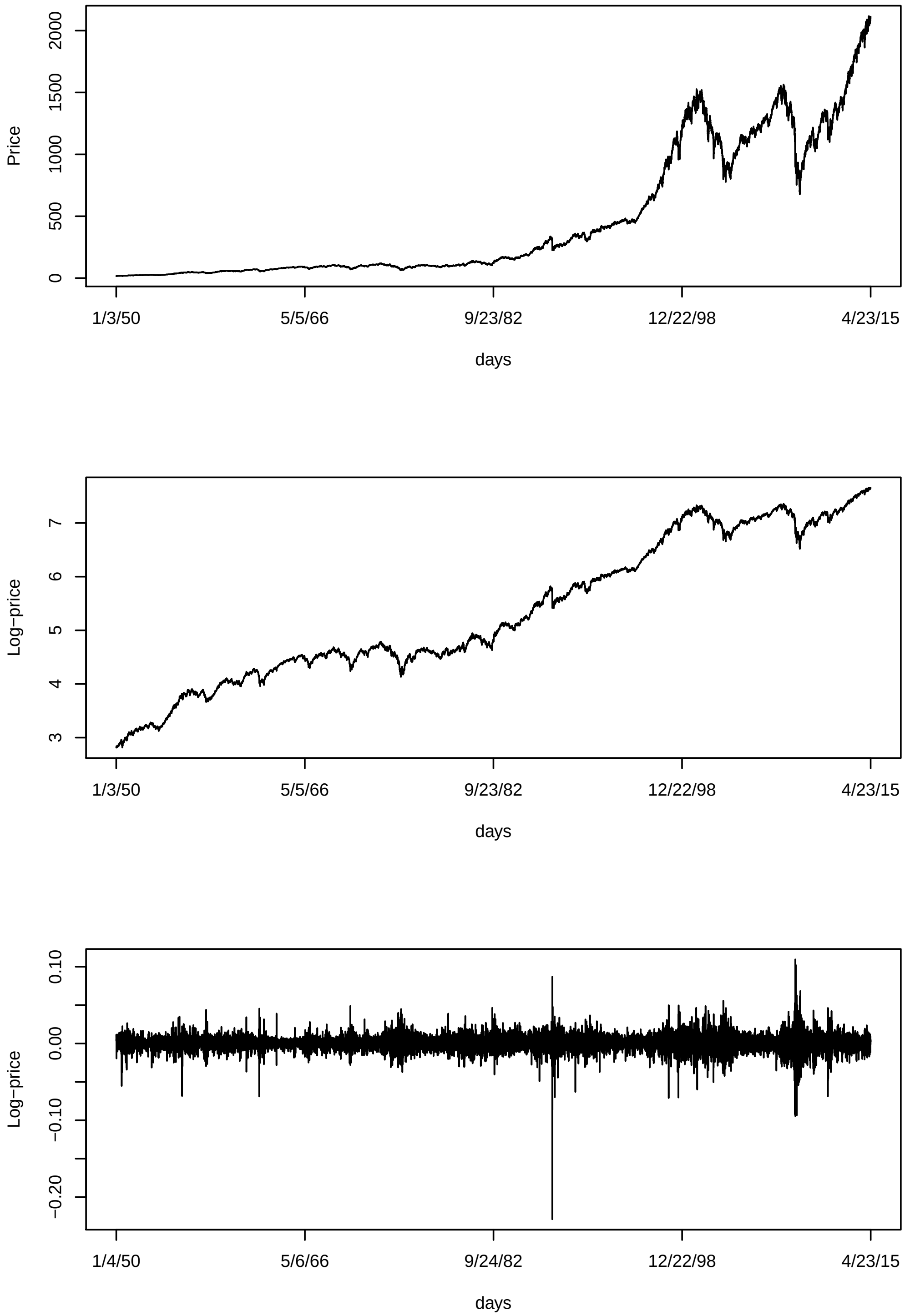

Figure 1: S&P500: preços, log-preços e log-retornos.

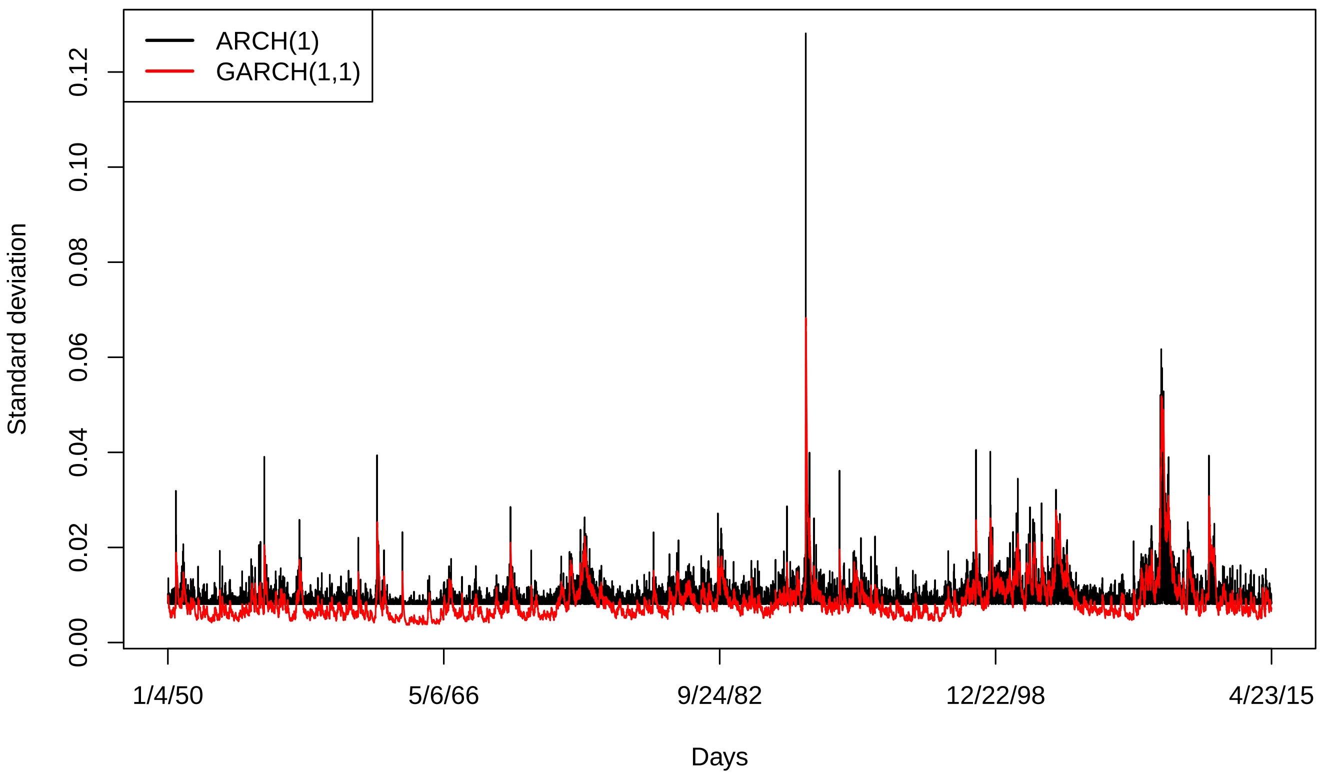

Figure 2: S&P500: Estimativas dos desvios-padrões pelos modelos ARCH(1) e GARCH(1,1).

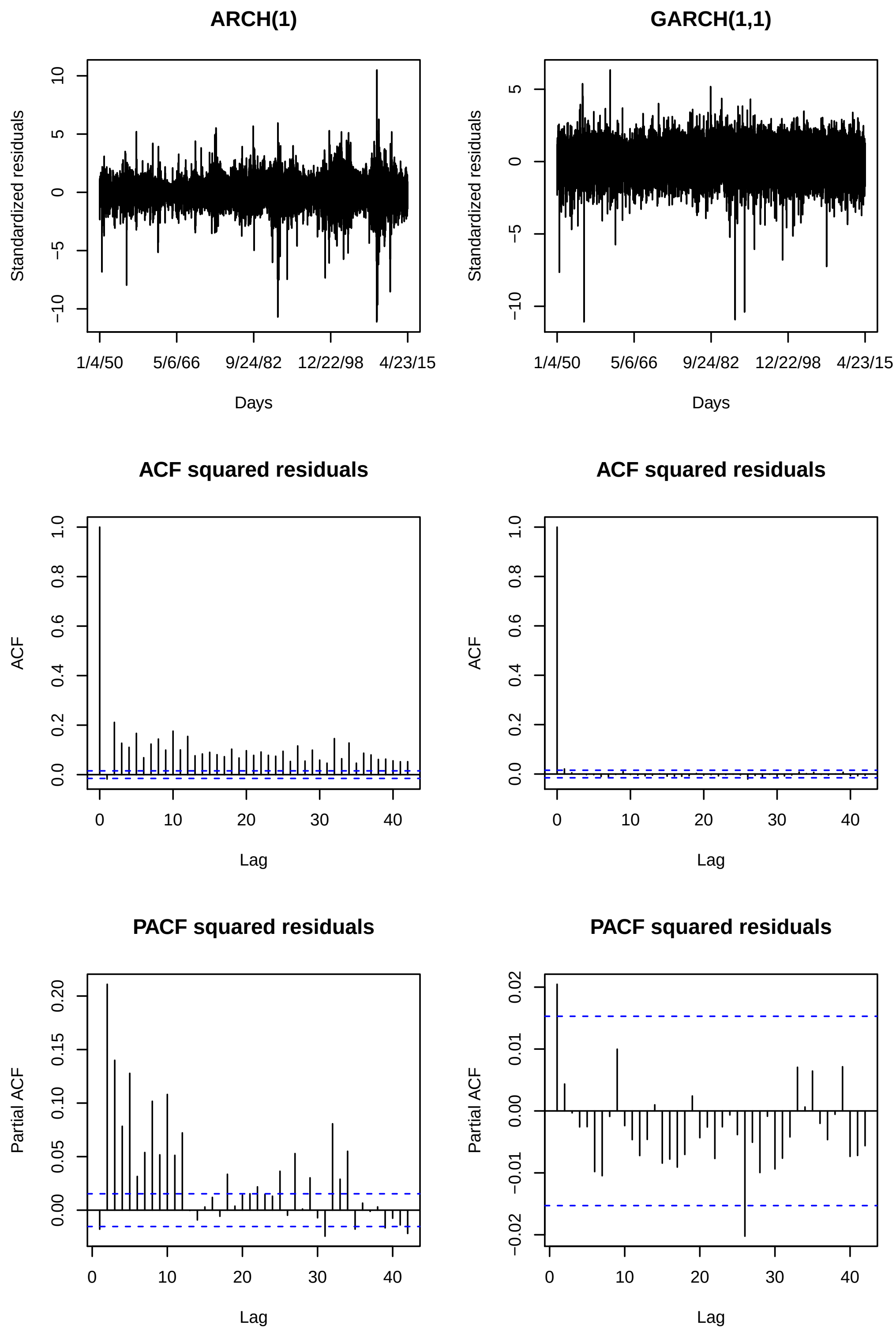

Figure 3: S&P500: Análise residual dos modelos ARCH(1) e GARCH(1,1).