Econometria Avançada - 2015-1 **Terceira lista de exercícios**

SOLUÇÃO

Problema 1. Seja r_t os retornos (ou log-retornos) diários de um ativo financeiros (por exemplo, S&P500 ou Petrobrás ON) tal que $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$, onde ε_t e σ_t são independentes e $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$. Portanto r_t também é normal com $E(r_t) = 0$ e $V(r_t) = E(r_t^2) = E(\sigma_t^2)$. Ou seja, apesar da média condicional de r_t ser zero, sua variância condicional é σ_t e pode variar no tempo, um fato comumente observado em séries temporais financeiras. A curtose de r_t, denotada aqui por K_{r_t}, mede o peso das caudas da distribuição de r_t e é dada por $K_{r_t} = E(r_t^4)/\{E(r_t^2)\}^2$. Obtenha K_{r_t} para os modelos: a) ARCH(1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2$; b) GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$; e c) SV-AR(1): $\log \sigma_t^2 = \mu + \phi(\log \sigma_{t-1}^2 - \mu) + u_t$, onde $u_t \sim N(0, \tau^2)$.

Antes de resolvermos a)-c), vamos relembrar a diferença entre esperança (variância) conditional e esperança (variância) incondicional. É fácil ver que

$$E(r_t|\sigma_t) = E(\sigma_t\varepsilon_t|\sigma_t) \stackrel{\sigma_t \perp \varepsilon_t}{=\!=} E(\sigma_t|\sigma_t)E(\varepsilon_t|\sigma_t) = \sigma_t \times 0 = 0,$$

onde $\sigma_t \perp \varepsilon_t$ denota que σ_t é independente de ε_t. Segue, de um resultado básico de probabilidade[1], que $V(r_t|\sigma^2) = E(r_t^2|\sigma^2)$. Portanto

$$V(r_t|\sigma_t) = E(r_t^2|\sigma_t) = E(\sigma_t^2\varepsilon_t^2|\sigma_t) \stackrel{\sigma_t \perp \varepsilon_t}{=\!=} E(\sigma_t^2|\sigma_t)E(\varepsilon_t^2|\sigma_t) = \sigma_t^2 \times 1 = \sigma_t^2,$$

pois $E(\varepsilon_t^2|\sigma_t) = E(\varepsilon_t^2) = 1$. Perceba que a suposição de normalidade para ε_t não foi usada em nenhum momento até aqui.

Usando dois resultados básicos de probabilidade[2], segue imediatamente que

$$\begin{aligned} E(r_t) &= E\{E(r_t|\sigma_t)\} = E\{0\} = 0 \\ V(r_t) &= E\{V(r_t|\sigma_t)\} + V\{E(r_t|\sigma_t)\} = E\{\sigma_t^2\} + V\{0\} = E(\sigma_t^2). \end{aligned}$$

Somente nesse momento é necessário se utilizar as estruturas ARCH, GARCH e SV.

ARCH(1): $V(r_t) = E(r_t^2) = E(\sigma_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2)$. Como $E(r_t^2) = E(r_{t-1}^2)$ (esperanças incondicionais), segue que

$$V(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

GARCH(1,1): $V(r_t) = E(r_t^2) = E(\sigma_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2) + \beta_1 E(\sigma_{t-1}^2)$. Como $E(r_t^2) = E(r_{t-1}^2) = E(\sigma_t^2) = E(\sigma_{t-1}^2)$, segue que

$$V(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}.$$

[1] $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$. Portanto, quando $E(X) = 0$, segue que $V(X) = E(X^2)$.

[2] $E(X) = E\{E(X|Y)\}$ e $V(X) = E\{V(X|Y)\} + V\{E(X|Y)\}$.

Só nos resta obter $E(r_t^4)$:

$$E(r_t^4) = E\{E(r_t^4|\sigma_t)\} = E\{E(\sigma_t^4\varepsilon_t^4|\sigma_t)\} = E\{\sigma_t^4 E(\varepsilon_t^4)\} = 3E(\sigma_t^4),$$

pois a curtose da distribuição normal padrão é igual a 3.

ARCH(1):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}E(r_t^4) &= E(\sigma_t^4) = E\{(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2\} = \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E(r_{t-1}^2) + \alpha_1^2 E(r_{t-1}^4) \\
&= \alpha_0^2 + 2\alpha_1 \frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_1} + \alpha_1^2 E(r_{t-1}^4) = \alpha_0^2 \left(\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + \alpha_1^2 E(r_{t-1}^4)
\end{aligned}$$

logo

$$E(r_t^4) = 3\frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)/(1-\alpha_1)}{1-3\alpha_1^2}$$

e

$$K_{r_t} = \frac{E(r_t^4)}{\{E(r_t^2)\}^2} = \frac{3\frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)/(1-\alpha_1)}{1-3\alpha_1^2}}{\alpha_0^2/(1-\alpha_1)^2} = \frac{3(1+\alpha_1)(1-\alpha_1)}{1-3\alpha_1^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}.$$

GARCH(1,1): O que você tem que mostrar aqui é que

$$K_{r_t} = 3\left(\frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}\right)$$

Finalmente, duas complicações adicionais surgem quando se trata do modelo SV-AR(1):

$$\log\sigma_t^2 = \mu + \phi(\log\sigma_{t-1}^2 - \mu) + u_t \qquad u_t \sim N(0,\tau^2).$$

Em primeiro lugar, existe agora o termo de erro u_t que tem que ser levado em consideração. Mas esse é um problema relativamente simples, uma vez que assumimos que ε_t e u_t são independentes entre si. Em segundo lugar, para se obter esperança, variância e curtose de r_t é necessário se obter $E(\sigma_t^2)$ e $E(\sigma_t^4)$, que são momentos de uma distribuição log-normal (dado que $\log\sigma_t$ é normalmente distribuído).

Problema 2. Mostre que se $r_t \sim$ ARCH(2) normal, então $r_t^2 \sim$ AR(2) com inovações não-normais. Mostre também que $\{r_t\}$ é uma sequência de ruídos brancos.

Como $r_t \sim$ ARCH(2) normal, podemos escrever (como no problema 1 acima)

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 \end{aligned}$$

de forma que, se definirmos $\nu_t = r_t^2 - \sigma_t^2$, temos que

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \nu_t,$$

ou seja, $r_t^2 \sim AR(2)$.

O que ainda resta fazer é entender o comportamento de ν_t:

$$\nu_t = r_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(1 - \varepsilon_t^2).$$

Segue que

$$E(\nu_t) = E(\sigma_t^2)E(1 - \varepsilon_t^2) = 0,$$

e

$$E(\nu_t \nu_{t+h}) = E\{\sigma_t^2 \sigma_{t+h}^2\} E\{(1 - \varepsilon_t^2)\} E\{(1 - \varepsilon_{t+h}^2)\} = 0.$$

Portanto o processo $\{\nu_t\}$ é um ruído branco.

Problema 3. Suponha que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sejam observações de uma série de log-retornos seguindo um modelo AR(1)-GARCH(1,1) normal, isto é,

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \phi r_{t-1} + u_t, \\ u_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

para $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$. Perceba que o modelo acima pode ser mais compatamente escrito como

$$\begin{aligned} r_t | r_{t-1}, \sigma_t &\sim N(\mu + \phi_1 r_{t-1}, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu - \phi r_{t-2})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

o que evidencia a normalidade dos log-retornos r_t e também que σ_t^2 depende de r_{t-1}^2, r_{t-2}^2 e σ_{t-1}^2. Obtenha a função de log-verossimilhança condicional de $(\mu, \phi, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Sem perda de generalidade, assuma que $\sigma_0^2 = r_0 = r_{-1} = 0$.

Para se obter a função de log-verossimilhança condicional de $\theta = (\mu, \phi, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$, é necessário que escrevamos a densidade conjunta dos dados condicional em θ, $p(r_1, \ldots, r_n | \theta)$. Uma vez que $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ são deterministicamente derivados de σ_0^2, r_0, r_{-1}, θ e $r_1, \ldots, r_n$, segue que

$$p(r_1, \ldots, r_n | \theta) = \prod_{t=1}^{n} p(r_t | r_{t-1}, \theta) = \prod_{t=1}^{n} (2\pi\sigma_t^2)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(r_t - \mu - \phi r_{t-1})^2}{\sigma_t^2} \right\}.$$

Portanto, a função log-verossimilhança condicional de θ é

$$l(\theta) = \log p(r_1, \ldots, r_n | \theta) = K - \frac{1}{2} \left[\log(2\pi) + \sum_{t=1}^{n} \log \sigma_t^2 \right] + \sum_{t=1}^{n} \sigma_t^{-2} (r_t - \mu - \phi r_{t-1})^2.$$

O estimador de máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$, é obtido maximizando $l(\theta)$ sujeito às seguintes restrições: $|\phi| < 1$, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 > 0$ e $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Problema 4. O arquivo `sp500.csv` contém preços diários do S&P500 para o período de 03/01/1950 a 23/04/2015 (16432 observações). Veja a figura 1 com os dados.

a) Ajuste modelos ARCH(1), GARCH(1,1) e SV-AR(1) para essa série temporal financeira. Mais precisamente, para $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$, onde ε_t e σ_t são independentes e $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, ajuste os modelos

   a1) ARCH(1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2$.

   a2) GARCH(1,1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$.

   a3) SV-AR(1): $\log \sigma_t^2 = \mu + \phi(\log \sigma_{t-1}^2 - \mu) + u_t$, onde $u_t \sim N(0, \tau^2)$.

   Veja os resultados na próxima página e nas figuras 2 a 3.

```
ARCH(1)
Parameter        Estimate      Std. Error
   alpha0    6.518712e-05    9.616782e-07
   alpha1    3.118930e-01    1.465707e-02

GARCH(1,1)
Parameter        Estimate      Std. Error
   alpha0    8.116538e-07    9.956670e-08
   alpha1    8.055070e-02    4.198828e-03
    beta1    9.127400e-01    4.483739e-03

SV-AR(1)
             mu    phi  sigma
1st Qu.  -9.806 0.9844 0.1404
Median   -9.752 0.9857 0.1449
Mean     -9.752 0.9856 0.1453
3rd Qu.  -9.700 0.9869 0.1497

VARIANCE, STANDARD DEVIATION AND KURTOSIS

             Sample   ARCH(1)  GARCH(1,1)  SV-AR(1)
Variance  0.0000944 0.0000947   0.0001210 0.0000583
St.Dev.   0.0097164 0.0097331   0.0109988 0.0076381
Kurtosis 24.6164182 3.8241874 101.1132664 6.3648994
```

b) Divida a série em grupos de 5 anos (13 grupos, portanto) e repita as análises de a). Como se comportam os parâmetros dos modelos ao longo do tempo? Comente seus resultados.

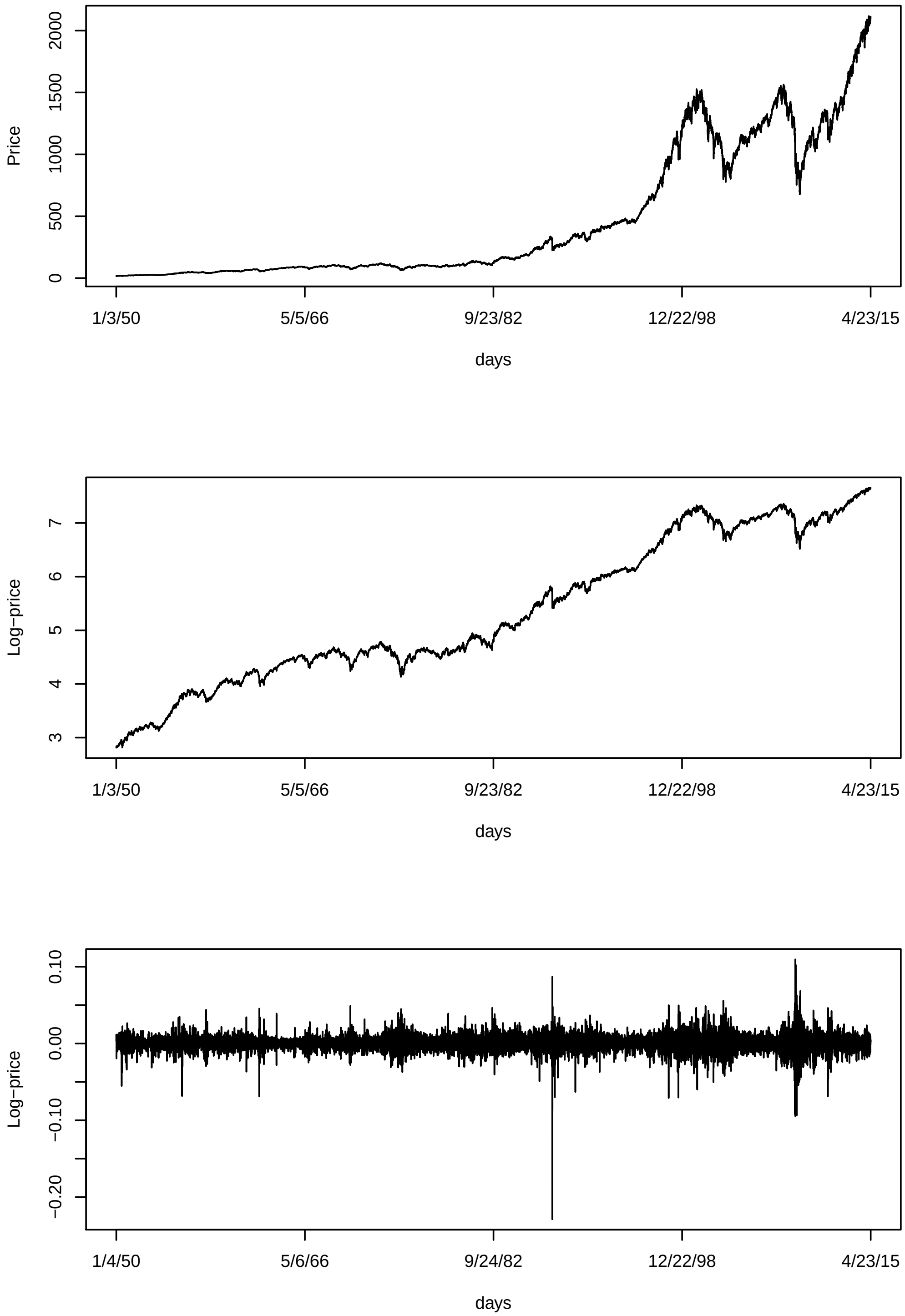

Figure 1: S&P500: preços, log-preços e log-retornos.

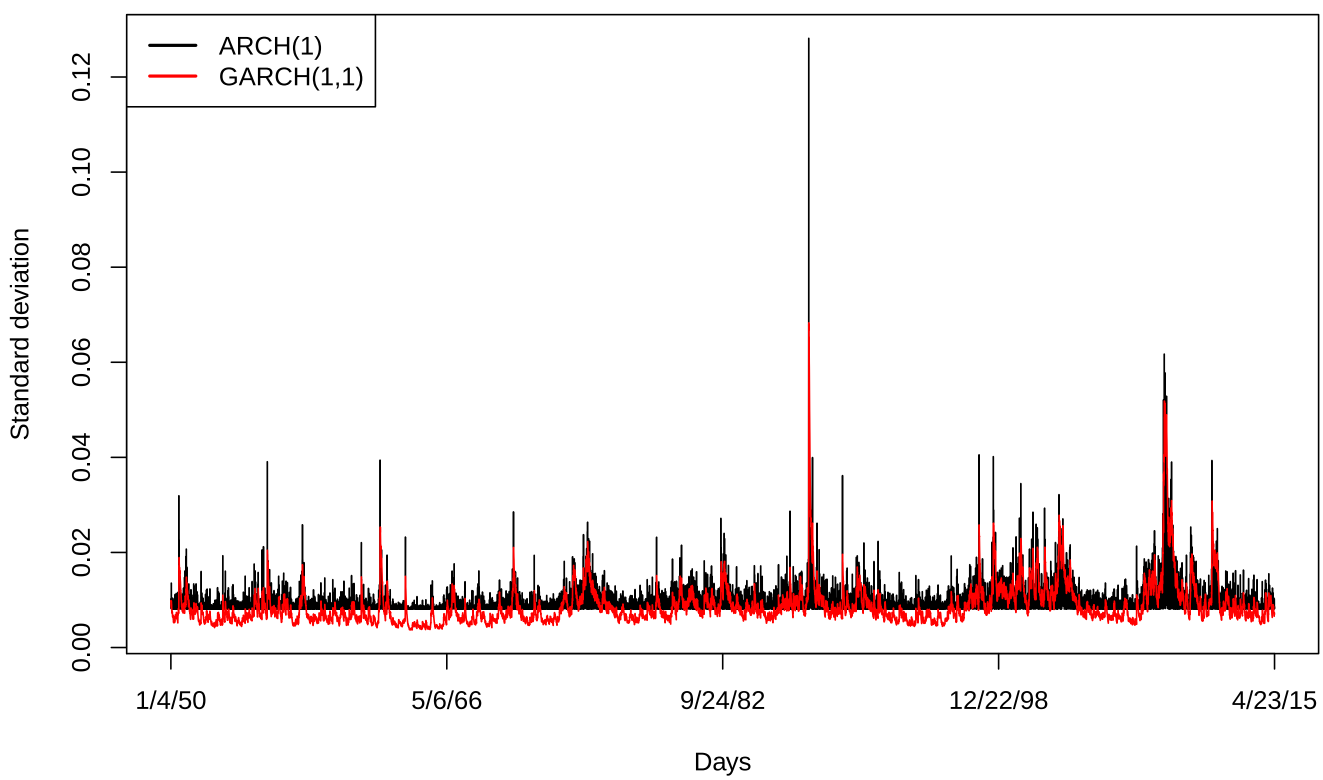

Figure 2: S&P500: Estimativas dos desvios-padrões pelos modelos ARCH(1) e GARCH(1,1).

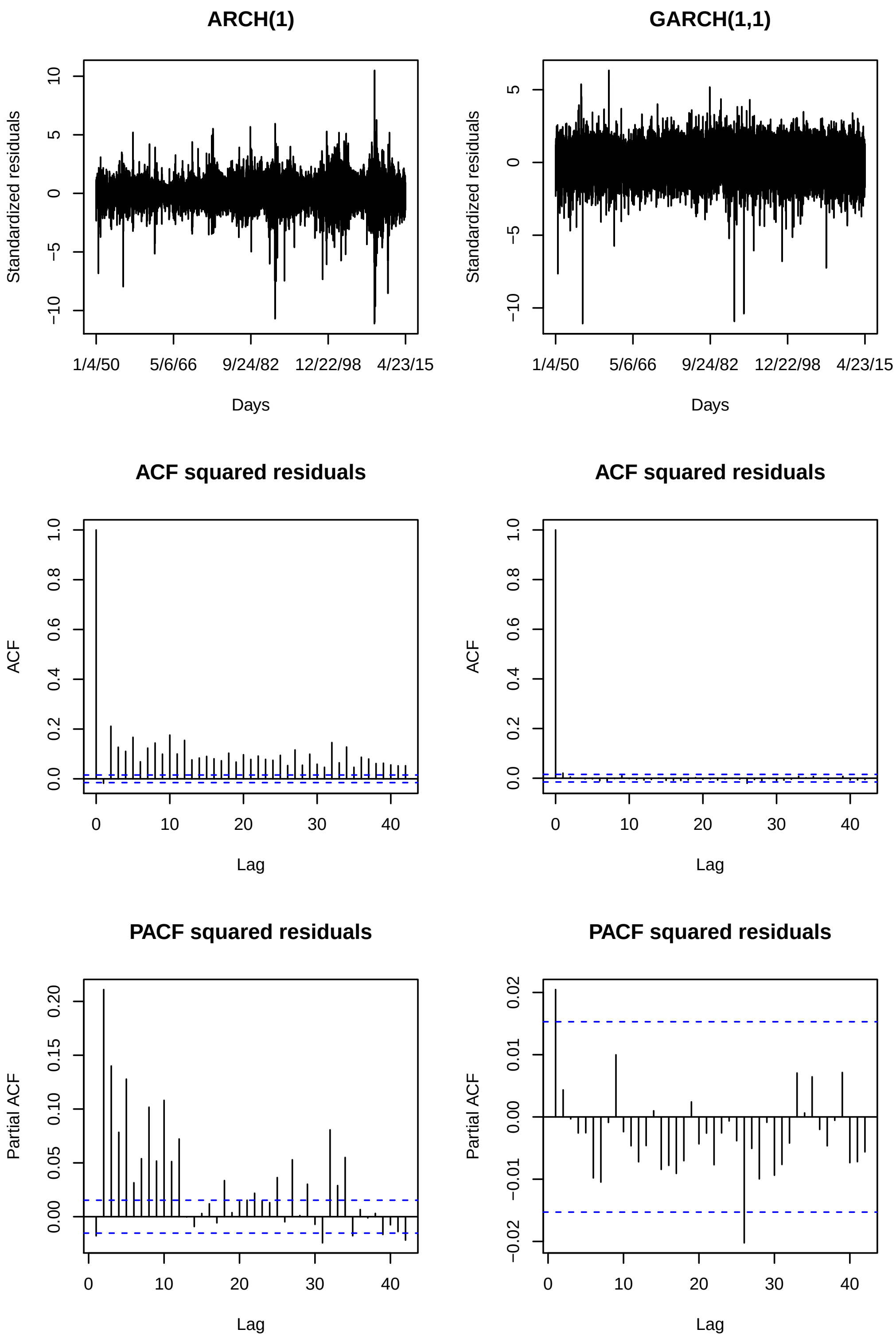

Figure 3: S&P500: Análise residual dos modelos ARCH(1) e GARCH(1,1).