

Modelos Lineares Não-Estacionários

Aula 04

Enders (2010, 3. ed.) – Seções 4.5 a 4.7

Bueno (2011, 2. ed.) – Capítulo 4

Morettin (2011, 2. ed.) – Capítulos 2, 3 e 4

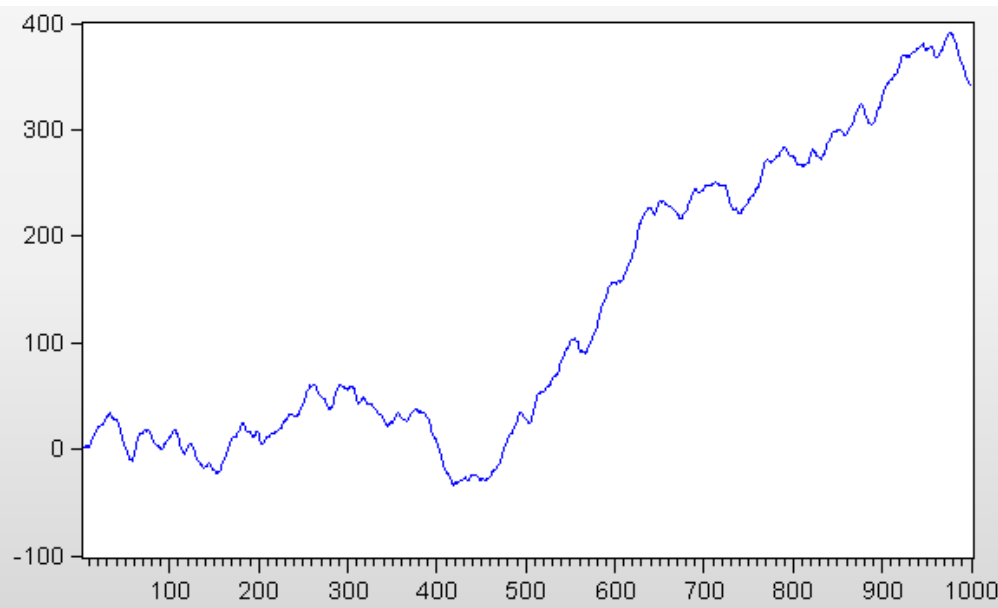
MODELO ARIMA

Bueno (2011, 2. ed.) – Seções 4.1 a 4.4

Morettin (2011, 2. ed.) – Seção 2.6 e Capítulo 3

Exemplo 1

A seguir são apresentados o gráfico e o correlograma de uma realização de uma série temporal X_t :



Included observations: 998

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
█	█	1	0.998	0.998	997.42	0.000
█	█	2	0.996	-0.043	1991.9	0.000
█	█	3	0.994	-0.037	2983.3	0.000
█	█	4	0.992	-0.026	3971.4	0.000
█	█	5	0.990	-0.021	4955.9	0.000
█	█	6	0.987	-0.024	5936.7	0.000
█	█	7	0.985	-0.024	6913.6	0.000
█	█	8	0.982	-0.019	7886.5	0.000
█	█	9	0.980	-0.011	8855.3	0.000
█	█	10	0.977	-0.009	9819.8	0.000
█	█	11	0.975	-0.003	10780.	0.000
█	█	12	0.972	-0.004	11736.	0.000
█	█	13	0.969	-0.006	12688.	0.000
█	█	14	0.966	-0.005	13635.	0.000
█	█	15	0.964	-0.013	14578.	0.000
█	█	16	0.961	-0.011	15516.	0.000
█	█	17	0.958	-0.006	16450.	0.000
█	█	18	0.955	-0.005	17379.	0.000
█	█	19	0.952	-0.006	18303.	0.000
█	█	20	0.949	-0.007	19223.	0.000

Observando o gráfico e o correlograma da série de interesse, não é difícil notar que a mesma é não-estacionária. Ainda, tal série parece apresentar tendência (resta saber se determinística ou estocástica).

Exemplo 1 (cont.)

É sabido que o processo gerador da série temporal X_t é dado por:

$$X_t = 1,8X_{t-1} - 0,8X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Pergunta: o processo gerador da série X_t é um AR(2) estacionário?
Justifique a sua resposta.

Exemplo 1 (cont.)

Resposta:

Como $\phi(L) = 1 - 1,8L + 0,8L^2$, então as raízes do polinômio autorregressivo são iguais a 1 e 1,25.

Ou seja, uma raiz está fora do círculo unitário e a outra raiz está sobre o círculo unitário.

Portanto, a série temporal X_t não pode ter sido gerada por um processo AR(2) estacionário.

Ainda, vale observar que no PGD de X_t não há um polinômio no tempo ligado à tendência (ou seja, a tendência não é determinística).

Resultado

Prova-se que a presença de raiz unitária no polinômio autorregressivo induz comportamento não-estacionário numa série temporal.

Voltando ao Exemplo 1

Não é difícil observar que o inverso das raízes do polinômio autorregressivo são iguais a 1 e 0,80.

Com isso, o polinômio autorregressivo, $\phi(L)$, tem a seguinte representação na forma fatorada:

$$\phi(L) = 1 - 1,8L + 0,8L^2 = (1 - 0,8L)(1 - 1L)$$

Assim, reescrevendo o PGD de X_t , utilizando o polinômio $\phi(L)$ na versão fatorada, vem que:

$$(1 - 0,8L)(1 - 1L)X_t = \varepsilon_t$$

Dessa forma, é fácil perceber que a série original é não-estacionária, uma vez que $(1 - L)X_t = \Delta X_t$.

Voltando ao Exemplo 1 (cont.)

Logo, a primeira diferença da série X_t é que deve ser estacionária.

Dessa forma, podemos escrever

$$(1 - 0,8L)\Delta X_t = \varepsilon_t$$

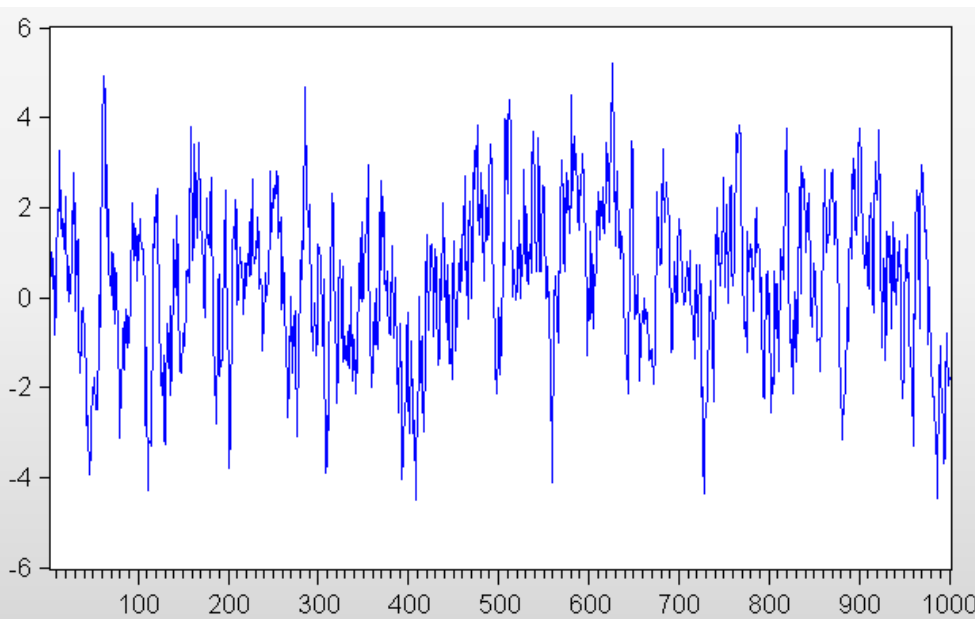
Ou, ainda,

$$\Delta X_t = 0,8\Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Logo, $\Delta X_t \sim \text{AR}(1)$ estacionário, uma vez que 0,8 é um valor, em módulo, menor que 1. Ou seja, a série X_t tornou-se estacionária após tomarmos a primeira diferença. Assim, X_t é uma série de diferença estacionária.

Voltando ao Exemplo 1 (cont.)

A seguir são apresentados o gráfico e o correlograma da primeira diferença da série temporal X_t :



Included observations: 998

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.813	0.813	661.62	0.000		
2	0.655	-0.019	1091.1	0.000		
3	0.534	0.022	1377.5	0.000		
4	0.431	-0.015	1564.3	0.000		
5	0.362	0.041	1695.9	0.000		
6	0.294	-0.030	1782.7	0.000		
7	0.222	-0.046	1832.3	0.000		
8	0.173	0.017	1862.3	0.000		
9	0.141	0.020	1882.5	0.000		
10	0.112	-0.010	1895.2	0.000		
11	0.079	-0.033	1901.5	0.000		
12	0.065	0.037	1905.7	0.000		
13	0.048	-0.015	1908.1	0.000		
14	0.019	-0.053	1908.5	0.000		
15	0.002	0.007	1908.5	0.000		
16	-0.016	-0.016	1908.7	0.000		
17	-0.016	0.036	1909.0	0.000		
18	-0.008	0.013	1909.1	0.000		
19	-0.012	-0.024	1909.2	0.000		
20	-0.021	-0.013	1909.6	0.000		

Como a FAC decai exponencialmente e a FACP é truncada no *lag* 1, então $\Delta X_t \sim \text{AR}(1)$. Ainda, do correlograma anterior, não é difícil observar que uma estimativa preliminar para o parâmetro autorregressivo de ordem 1 é algo em torno de 0,80.

PROCESSOS INTEGRADOS

Definição. Se $\Delta^d X_t$ é estacionário, para $d \geq 1$, então dizemos que X_t é *integrado de ordem d* e escrevemos $X_t \sim I(d)$.

- ✓ Quando um processo é integrado de ordem 1, implica em trabalharmos com a variável original (ou em nível) diferenciada uma vez. Assim, serão analisadas as variações dessa variável (taxas de crescimento).
- ✓ Caso seja necessária a aplicação de uma segunda diferença, implica em trabalharmos com a aceleração da taxa de crescimento da respectiva variável original.
- ✓ Segundo Margarido e Medeiros Jr. (2006), determinadas séries econômicas, em particular relacionadas a preços nominais, numa conjuntura com acirramento do processo inflacionário, podem conter duas ou até mais raízes unitárias.

MODELOS ARIMA

Definição. *Se $\Delta^d X_t \sim ARMA(p,q)$, dizemos que $X_t \sim ARIMA(p,d,q)$. Ou seja X_t é um processo integrado misto autorregressivo e de médias móveis de ordem (p,d,q) , ou, simplesmente, $ARIMA(p,d,q)$. Ainda, a representação de tal processo é dada por*

$$\varphi(L)X_t = \theta_0 + \theta(L)\varepsilon_t.$$

em que

$$\varphi(L) = \phi(L)\Delta^d = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_{p+d} L^{p+d}$$

Voltando ao Exemplo 1 (cont.)

Dos *slides* anteriores, como

$$\Delta X_t \sim \text{AR}(1)$$

então,

$$X_t \sim \text{ARIMA}(1,1,0),$$

com

$$\varphi(L) = 1 - 1,8L + 0,8L^2 = (1 - 0,8L)(1 - L)$$

$$\phi(L) = 1 - 0,8L$$

OBSERVAÇÃO

Formas de Representação do modelo ARIMA

O modelo ARIMA pode ser representado de três formas:

- a) **Forma de equação a diferenças:** expressa em termos de valores prévios de X_t e do valor atual e prévios de ε_t ;
- b) **Forma de choques aleatórios (médias móveis infinita):** expressa em termos do valor atual e prévios de ε_t ;
- c) **Forma invertida (autorregressivo infinito):** expressa em termos de valores prévios de X_t e do valor atual de ε_t .

Metodologia Box & Jenkins para Modelos ARIMA

No estabelecimento de um modelo ARIMA para uma série temporal existem algumas etapas a considerar:

- a. **Identificação;**
- b. **Estimação; e**
- c. **Diagnóstico.**

Ou seja, as etapas são análogas àquelas utilizadas para propor um modelo da classe ARMA para uma série temporal estacionária.

Todavia, seria interessante utilizarmos, antes, algum **teste de raiz unitária** para avaliarmos se a série temporal de interesse é, ou não, integrada de determinada ordem.

Exercício 1 (ANPEC)

Julgue as afirmativas:

- (0) Toda série temporal estacionária com variância finita pode ser escrita como um modelo de média móvel com termo de erro serialmente não correlacionado.
- (1) Uma série temporal não estacionária tem pelo menos uma raiz unitária.
- (2) O teste de Dickey-Fuller é monocaudal.
- (3) Um modelo AR(2) dado por $Y_t = a + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, 3, \dots$, em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2 , será estacionário se $\phi_1 < 1$ e $\phi_2 < 1$.
- (4) Um passeio aleatório é um processo estacionário.

(0) V (1) F (2) V (3) F (4) F

Teste de Raiz Unitária

Enders (2010, 3. ed.) – Seções 4.5 a 4.7

Bueno (2011, 2. ed.) – Seção 4.5

Morettin (2011, 2. ed.) – Capítulo 4

Teste de Raiz Unitária

Seja o modelo

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

em que

$\{\varepsilon_t\}$ – é uma sequência i.i.d. que apresenta média zero, dado o passado de y :

$$E(\varepsilon_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = 0, \quad (2)$$

e é independente de y_0 .

Teste de Raiz Unitária

Se o processo $\{y_t\}$ segue o modelo proposto em (1), ele terá uma raiz unitária se, e somente se, $\rho = 1$.

Se $\alpha = 0$ e $\rho = 1$,

$\{y_t\} \sim$ *random walk sem drift*

[com as inovações $\{\varepsilon_t\}$ satisfazendo (2)].

Se $\alpha \neq 0$ e $\rho = 1$,

$\{y_t\} \sim$ *random walk com drift*

[neste caso $E(y_t)$ é uma função linear em t].

Teste de Raiz Unitária

Do *slide* anterior, podemos formular a seguinte hipótese nula:

$$H_0: \rho = 1 \quad (3)$$

Ou seja, sob H_0 , $\{y_t\}$ apresenta raiz unitária.

Ainda, a hipótese alternativa fica dada por

$$H_A: \rho < 1 \quad (4)$$

(na prática significa testar que $0 < \rho < 1$)

Teste de Raiz Unitária

Quando

$$|\rho| < 1,$$

$\{y_t\}$ é um processo AR(1) estável.

Testar (3) no modelo (1), sem constante, contra a alternativa proposta em (4), é o mesmo que testar se o processo $\{y_t\}$ é um passeio aleatório sem *drift* contra a alternativa de ser um processo não-integrado.

Teste de Raiz Unitária

Sob H_0 , o processo $\{y_t\}$ é um passeio aleatório.

Ainda, é comum subtrairmos y_{t-1} de ambos os lados da equação (1), obtendo

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

(por simplicidade, foi admitido $\alpha = 0$ em (1))

o que nos faz trabalhar com uma variável resposta estável, sob a hipótese nula.

Teste de Raiz Unitária

Do *slide* anterior, podemos concluir que, testar

$$H_0: \rho = 1,$$

via (1), é equivalente a testar

$$H_0: \gamma = 0,$$

via (5), uma vez que

$$\gamma = \rho - 1.$$

Teste de Raiz Unitária

Problema: sob H_0 , y_{t-1} é $I(1)$, sendo assim, a razão t

$$t = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}}}$$

não apresentará uma distribuição normal assintótica.

A distribuição assintótica da estatística t anteriormente apresentada, sob H_0 , é conhecida como **distribuição τ de Dickey-Fuller**.

Teste de Raiz Unitária

Caso (5) não contemple uma representação dinamicamente completa, é interessante acrescentarmos, como variáveis explicativas, no modelo, as defasagens

$$\Delta y_{t-i}, i = 1, 2, \dots, p-1,$$

para assegurarmos que os ε_t sejam ruídos brancos.

Logo, teremos

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (6)$$

Teste de Raiz Unitária

Nesse caso, teremos o teste de Dickey-Fuller aumentado (teste ADF).

Para se ter uma ideia de quantas defasagens devemos utilizar, podemos fazer uso da FAC e da FACP dos resíduos do modelo estimado em (5), além dos critérios de informação.

Observação: a distribuição da estatística de teste continuará a mesma.

Teste de Raiz Unitária

Exercício 2

Conduza um teste ADF, a 1% de significância, para verificar se a série temporal dos logaritmos dos preços diários, ao fechamento, das ações da Petrobras, coletadas no período de 02/01/2003 a 04/02/2014, apresenta raiz unitária.

Teste de Raiz Unitária

Ainda, nós podemos incluir em (6) termos determinísticos, ou seja,

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (7)$$

ou

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (8)$$

Teste de Raiz Unitária

No caso do modelo (7), para testarmos

$$H_0: \gamma = 0,$$

Utilizamos os valores críticos disponibilizados na Tabela

τ_μ .

Em (8), o teste de significância para o parâmetro γ deverá ser concluído utilizando-se os valores críticos disponíveis na Tabela τ_τ .

Teste de Raiz Unitária

Escolha dos Termos Determinísticos

Devemos realizar o teste utilizando o modelo auxiliar (6), (7) ou (8)?

Dica:

- Caso o modelo auxiliar apresente termos determinísticos desnecessários, então o poder do teste diminuirá;
- Ausência de termos determinísticos importantes faz com que o poder do teste vá para zero.

O que fazer???

(Enders, 2010 – Seções 4.5 a 4.7)

Escolha dos Termos Determinísticos

Em (8), devemos proceder da seguinte maneira:

(a) Verificar, utilizando um valor crítico proveniente da distribuição adequada, se $\gamma = 0$;

(a.1) em caso negativo, paramos o procedimento e concluimos que a série não apresenta raiz unitária;

(a.2) em caso afirmativo, devemos fazer um teste individual para o parâmetro β , que será concluído com base num valor crítico da distribuição $\tau_{\beta\tau}$; ou, ainda, utilizando as distribuições Φ_2 ou Φ_3 , podemos fazer um teste conjunto para os parâmetros α , β e γ ou β e γ , respectivamente.

Escolha dos Termos Determinísticos

Em (7), devemos proceder da seguinte maneira:

(b) Verificar, utilizando um valor crítico proveniente da distribuição adequada, se $\gamma = 0$;

(b.1) em caso negativo, paramos o procedimento e concluimos que a série não apresenta raiz unitária;

(b.2) em caso afirmativo, devemos fazer um teste individual para o parâmetro α , que será concluído com base num valor crítico da distribuição $\tau_{\alpha\tau}$; ou, ainda, utilizando a distribuição Φ_1 , podemos fazer um teste conjunto para os parâmetros α e γ .

Escolha dos Termos Determinísticos

Se concluirmos que α e β são parâmetros insignificantes, após as etapas anteriores, então estimamos o modelo auxiliar proposto em (6) e rejeitaremos a hipótese nula, ou seja, concluiremos que a série não apresenta raiz unitária, se o valor calculado da estatística do teste for inferior ao valor tabelado na distribuição τ .

Escolha dos Termos Determinísticos

OBSERVAÇÕES

1. Antes de aplicar um teste de raiz unitária, é importante verificar se a série de interesse apresenta problemas de heterocedasticidade. Em caso afirmativo, utilize, por exemplo, a transformação logarítmica.
2. Ainda, fazemos a suposição de que os erros apresentam um comportamento de ruído branco. Caso tal comportamento não seja detectado (via análise de resíduos, por exemplo), é interessante acrescentarmos na regressão auxiliar de interesse, Δy_{t-i} , $i = 1, 2, \dots, k$, como variável explicativa, para assegurarmos que os ε_t sejam ruídos brancos

Escolha dos Termos Determinísticos

OBSERVAÇÕES (cont.)

3. Phillips e Perron (1988) sugerem uma metodologia que leva em consideração o fato dos erros serem auto-correlacionados.
4. Elliott, Rothenberg e Stock (1996) propuseram o teste DF-GLS, que apresenta maior poder que o ADF, quando se tem termos determinísticos envolvidos na regressão auxiliar.
5. Kwiatkowski *et al.* (1992) propuseram o teste KPSS, cuja hipótese nula diz que o processo é *trend-stationary* contra a alternativa que é $I(1)$ com *drift*.

Escolha dos Termos Determinísticos

OBSERVAÇÕES (cont.)

6. O teste **ADF** serve apenas para verificar a presença de uma única raiz unitária.
7. Dickey e Pantula (1987) sugerem um procedimento para testar a presença de mais de uma raiz unitária. Para mais detalhes, vide Leitura Complementar (*slide 65*).

Mais detalhes sobre testes de raízes unitárias podem ser obtidos, por exemplo, em **Bueno (2011, Seção 4.5)**, **Enders (2004, cap. 4)**, **Fava(2000, cap. 12, In: Vasconcellos e Alves)** e **Morettin (2008, cap. 4)**.

Escolha dos Termos Determinísticos

OBSERVAÇÕES (cont.)

8. O teste conjunto, Φ_3 , citado anteriormente, é um teste tipo F, que se baseia na soma de quadrados dos modelos restrito e irrestrito. Aqui, desenvolveremos o teste que utiliza a distribuição Φ_3 :

Hipótese Nula

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estatística do teste

$$\hat{\Phi}_3 = \frac{\frac{SSR(r) - SSR(ir)}{2}}{\frac{SSR(ir)}{T - k}}$$

Valor Calculado < $\Phi_{3(\text{crit})} \Rightarrow$ não rej. H_0 .

T – número de observações efetivamente utilizadas;

k – número de parâmetros estimados, sob o modelo irrestrito.

Escolha dos Termos Determinísticos

OBSERVAÇÕES (cont.)

9. O teste conjunto, Φ_1 , citado anteriormente, também é um teste do tipo F, que se baseia na soma de quadrados dos modelos restrito e irrestrito:

Hipótese Nula

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estatística do teste

$$\hat{\Phi}_1 = \frac{\frac{SSR(r) - SSR(ir)}{2}}{\frac{SSR(ir)}{T - k}}$$

Valor Calculado $< \Phi_{1(crit)} \Rightarrow$ não rej. H_0 .

T – número de observações efetivamente utilizadas;

k – número de parâmetros estimados, sob o modelo irrestrito.

Teste de Raiz Unitária

Voltando ao Exercício 2

Conduza um teste ADF, a 1% de significância, para verificar se a série temporal dos logaritmos dos preços diários, ao fechamento, das ações da Petrobras, coletadas no período de 02/01/2012 a 04/02/2014, apresenta raiz unitária.

**LEITURAS
COMPLEMENTARES**

Processo “*trend-stationary*”

e

Processo “*difference-stationary*”

Introdução

Existem basicamente, duas formas de gerar processos não-estacionários e que sejam não-explosivos:

(i) Incluindo no PLG

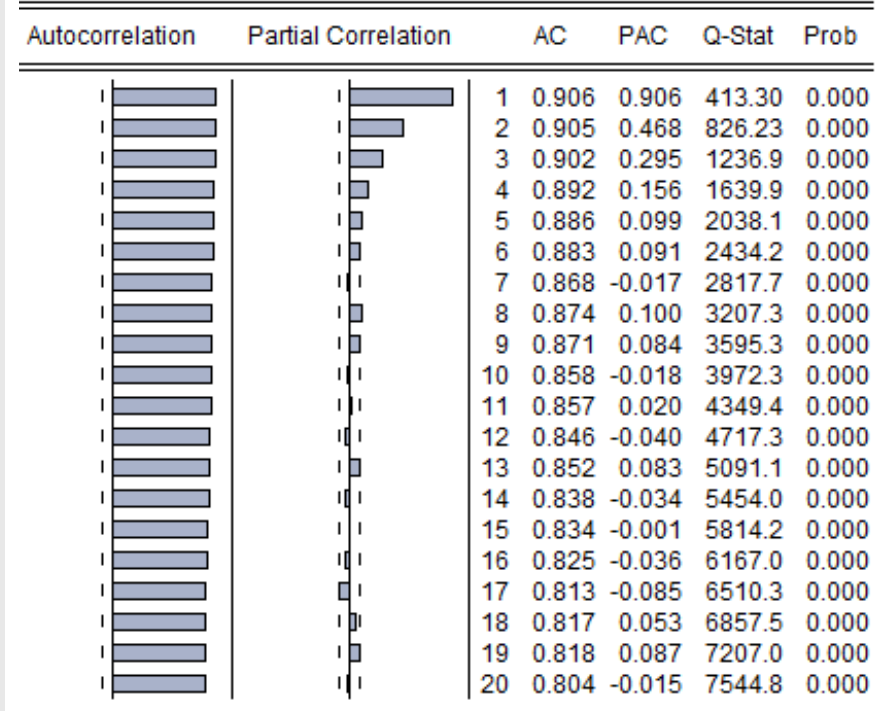
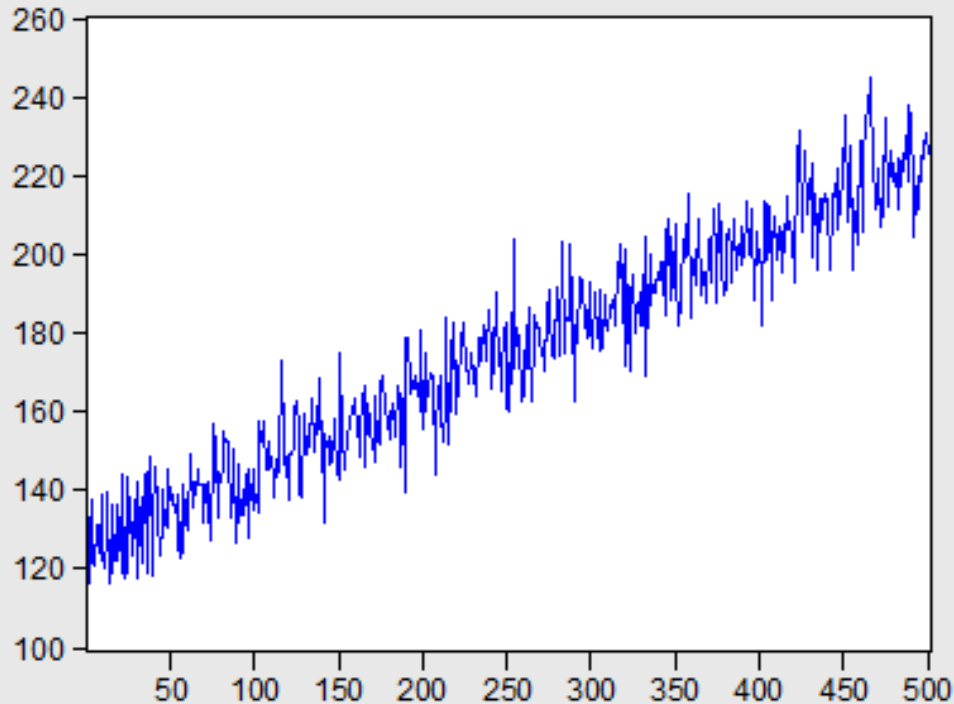
$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1,$$

uma tendência determinística, como por exemplo,

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \psi(L)\varepsilon_t,$$

obtendo um processo “*trend-stationary*”.

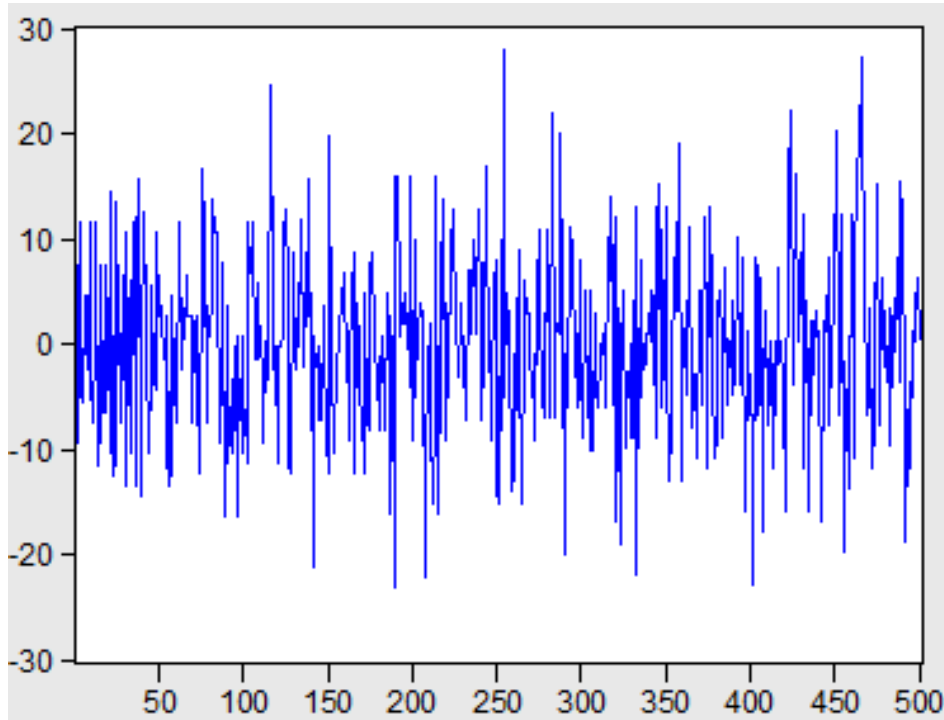
Processo “*trend-stationary*”



Série y_t , com tendência determinística

Correlograma

Processo “trend-stationary”



Série $w_t = y_t - E(y_t)$
(série livre de tendência)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.052	-0.052	1.3479	0.246
		2	0.018	0.016	1.5187	0.468
		3	0.033	0.035	2.0681	0.558
		4	-0.006	-0.003	2.0892	0.719
		5	-0.007	-0.009	2.1170	0.833
		6	-0.000	-0.002	2.1170	0.909
		7	-0.120	-0.120	9.4945	0.219
		8	0.009	-0.003	9.5380	0.299
		9	0.001	0.006	9.5383	0.389
		10	-0.095	-0.088	14.120	0.168
		11	-0.014	-0.025	14.216	0.221
		12	-0.064	-0.067	16.349	0.176
		13	0.050	0.049	17.639	0.172
		14	-0.017	-0.024	17.782	0.217
		15	0.010	0.009	17.831	0.272
		16	-0.042	-0.046	18.756	0.282
		17	-0.109	-0.141	24.942	0.096
		18	-0.004	-0.021	24.950	0.126
		19	0.077	0.069	28.021	0.083
		20	-0.038	-0.020	28.785	0.092

Correlograma

Introdução

(ii) Considerar um PLG com raiz unitária, da forma,

$$(1-L)X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1,$$

em que

$$\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots ; \mathbf{e}$$

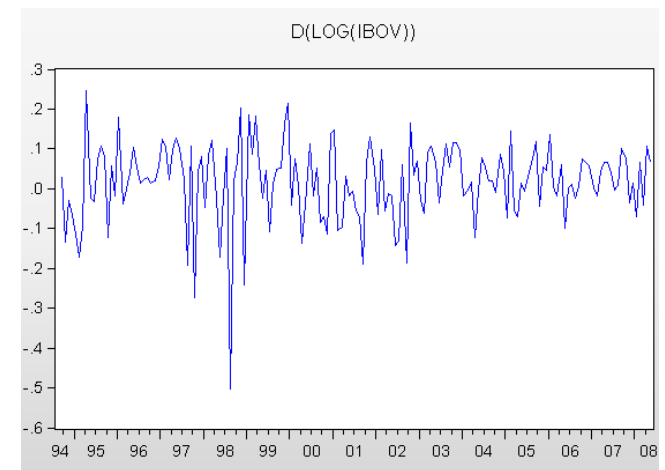
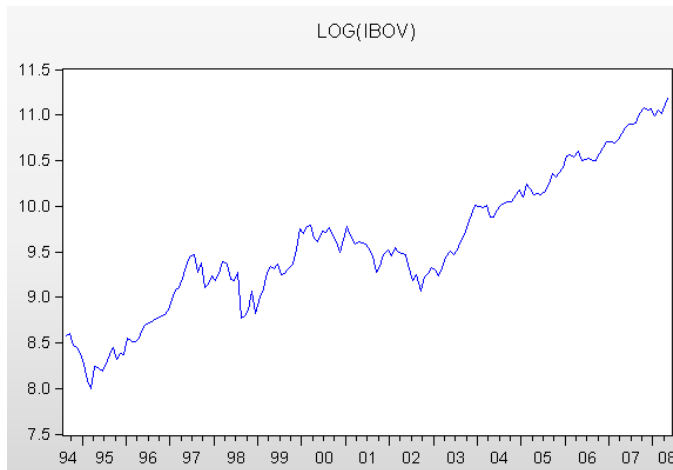
$$\psi(1) = \sum \psi_j \neq 0.$$

Processo Linear Geral com Raiz Unitária

Muitas séries econômicas e financeiras, por exemplo, são não-estacionárias, mas quando diferenciadas tornam-se estacionárias.

Por exemplo, a série mensal do $\ln(\text{Ibovespa})$, coletada no período de agosto de 1994 a maio de 2008, é não-estacionária. Todavia, $\Delta \ln(\text{Ibovespa})$ é estacionária. Ou seja, $\ln(\text{Ibovespa}) \sim I(1)$.

Para mais detalhes, vide os gráficos, a seguir:



A Rússia sofreu muito com a crise asiática, principalmente com a desvalorização do preço das *commodities*, já que os principais produtos de exportação do país eram o petróleo e o gás. Paralelo a isso, a moeda russa, o *rublo*, desvalorizou-se mais de 50% em função da estratégia adotada pelo governo de deixar o câmbio flutuar. Ainda, para piorar a situação, o governo declarou moratória de 90 dias ao pagamento da dívida externa. Por aqui, o Ibovespa se desvalorizou 63%.

Processos Integrados

Uma maneira alternativa de gerar processos não-estacionários é considerar modelos ARMA cuja parte AR não satisfaz condições de estacionariedade.

Por exemplo,

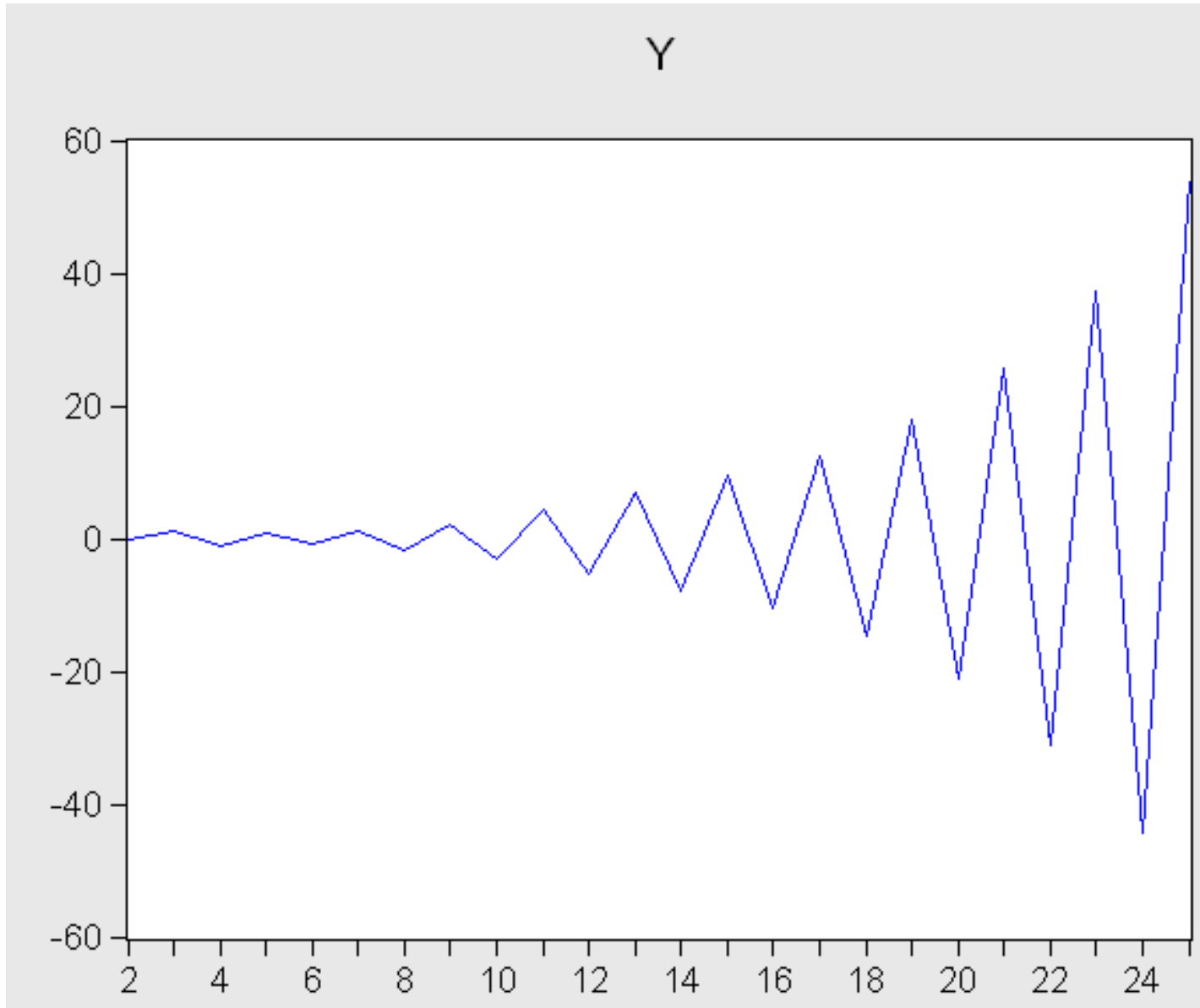
$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \phi > 1.$$

Então,

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \frac{\phi^{2(t+1)} - 1}{\phi^2 - 1}, \quad \text{crescente em } t.$$

Em geral, X_t terá uma tendência na média e na variância e X_t diz-se **explosivo**.

Processo Linear Geral com $|\phi| > 1$



Processos Integrados

Assim, trabalhando com o seguinte PGD

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

se:

$|\phi| < 1 \Rightarrow X_t$ é estacionário

$|\phi| > 1 \Rightarrow X_t$ é explosivo

$\phi = 1 \Rightarrow ?$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Neste caso temos um **Passeio Casual**.

Processos Integrados

Fazendo substituições sucessivas em

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

temos que:

$$X_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$X_t = (X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$$

$$X_{t-2} = X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

$$X_t = (X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = X_{t-3} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

⋮

$$X_t = X_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

Processos Integrados

Por suposição

$$\varepsilon_t \sim IID(0; \sigma_\varepsilon^2) \rightarrow \text{Ruído Branco}$$

$$X_0 = 0$$

Logo

$$X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

Os choques exercem efeito permanente sobre a variável X_t !!!!

Processos Integrados

Ainda

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1) = 0$$

$$Var(X_t) = Var(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1) =$$

Depende
de t!!!

$$\stackrel{indep}{=} Var(\varepsilon_t) + Var(\varepsilon_{t-1}) + \dots + Var(\varepsilon_1) = t \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_h(t) = (t - h)\sigma^2$$

$$\rho_h(t) = \sqrt{\frac{t-h}{t}}$$

Processos Integrados

Incluindo-se uma constante em

$$X_t = \theta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

teremos um **passeio casual com drift**.

Assim,

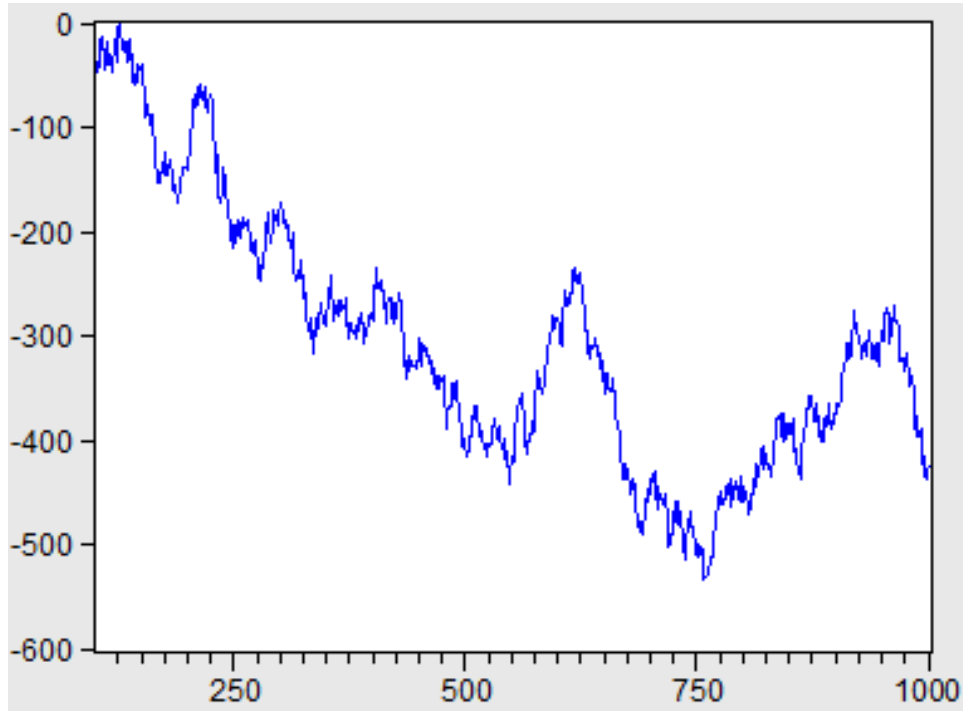
$$\mu_t = x_0 + t\theta_0$$

$$\gamma_0(t) = t\sigma^2$$

$$\gamma_h(t) = (t-h)\sigma^2$$

$$\rho_h(t) = \sqrt{\frac{t-h}{t}}$$

Random Walk – com drift

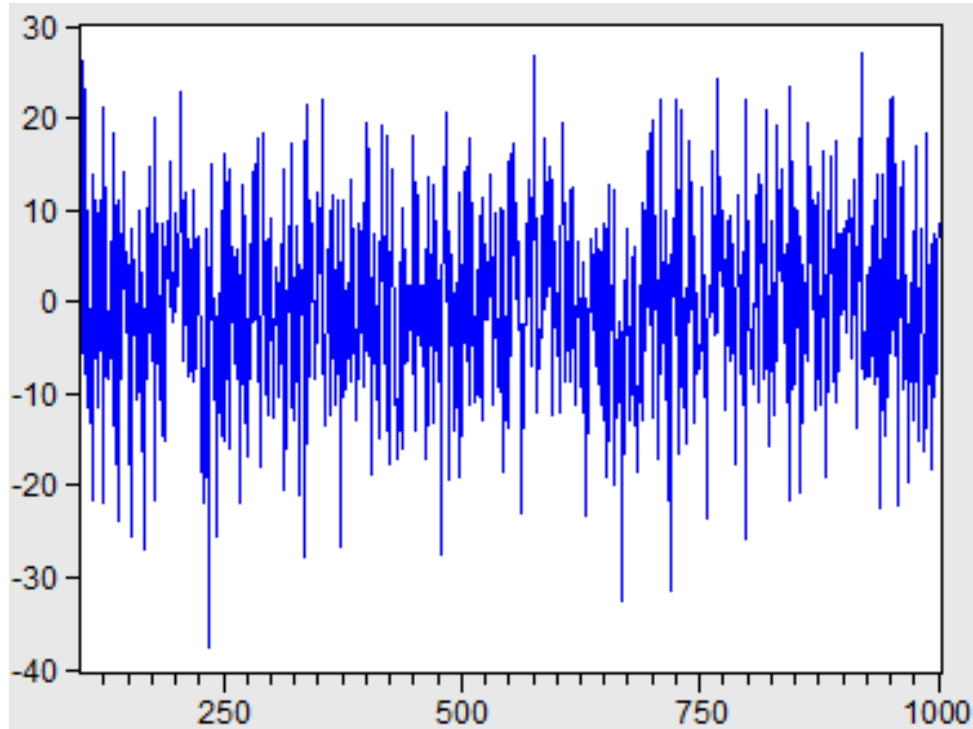


Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
0.994	0.994	891.60	0.000		
0.987	0.009	1773.1	0.000		
0.981	-0.006	2644.5	0.000		
0.975	-0.010	3505.7	0.000		
0.968	-0.044	4355.8	0.000		
0.961	0.010	5195.2	0.000		
0.955	-0.020	6023.7	0.000		
0.948	0.021	6841.6	0.000		
0.942	0.001	7649.3	0.000		
0.935	0.029	8447.4	0.000		
0.930	0.022	9236.4	0.000		
0.924	-0.017	10016.	0.000		
0.917	-0.023	10787.	0.000		
0.912	0.020	11548.	0.000		
0.905	-0.054	12299.	0.000		
0.899	0.015	13041.	0.000		
0.893	0.027	13773.	0.000		
0.887	0.022	14498.	0.000		
0.881	-0.037	15213.	0.000		
0.875	-0.025	15918.	0.000		

Série y_t , com tendência estocástica

Correlograma

Random Walk – com drift



Série $w_t = \Delta y_t$
(série livre de tendência)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.025	-0.025	0.5735	0.449
		2	0.014	0.013	0.7487	0.688
		3	0.001	0.002	0.7494	0.862
		4	0.029	0.028	1.4863	0.829
		5	0.000	0.002	1.4863	0.915
		6	-0.004	-0.005	1.5031	0.959
		7	0.002	0.002	1.5063	0.982
		8	-0.000	-0.001	1.5063	0.993
		9	-0.042	-0.042	3.1186	0.959
		10	-0.013	-0.015	3.2760	0.974
		11	0.001	0.001	3.2762	0.987
		12	0.012	0.013	3.4124	0.992
		13	-0.020	-0.016	3.7615	0.993
		14	0.086	0.086	10.611	0.716
		15	-0.004	0.000	10.627	0.779
		16	-0.033	-0.037	11.644	0.768
		17	0.001	0.000	11.645	0.821
		18	0.039	0.034	13.078	0.787
		19	0.027	0.027	13.755	0.798
		20	0.038	0.042	15.105	0.770

Correlograma

FAC

A função de autocorrelação (FAC) proporciona evidência de uma série não-estacionária.

Tipicamente, tais séries apresentam grandes FACs significativas para muitas defasagens.

Vide resultados teóricos descritos nos slides anteriores.

$$\rho_h(t) = \sqrt{\frac{t-h}{t}}$$

Logo, se t for grande, $\rho_h(t) \approx 1$: seqüência suave mas não-estacionária.

**Formas de Representação
de um
Modelo ARIMA**

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

O modelo ARIMA pode ser representado de três formas:

- a) em termos de valores prévios de X_t e do valor atual e prévios de ε_t ;
- b) em termos do valor atual e prévios de ε_t ;
- c) em termos de valores prévios de X_t e do valor atual de ε_t .

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

- Forma de equação a diferenças

Esta é a forma usual do modelo, útil para calcular previsões.

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_{p+d} X_{t-p-d} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

em que,

$$\varphi(L) = \phi(L)\Delta^d = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d$$

$$\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_{p+d} L^{p+d}.$$

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

b) Forma de choques aleatórios (médias móveis infinita)

Uma forma conveniente para se calcular a variância dos erros de previsão é

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

ou seja,

$$X_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

b) Forma de choques aleatórios (médias móveis infinita) (cont.)

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por $\varphi(L)$, vem que

$$\varphi(L)X_t = \varphi(L)\psi(L)\varepsilon_t$$

e usando o fato de que

$$\varphi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

b) Forma de choques aleatórios (médias móveis infinita) (cont.)

temos

$$\varphi(L)\psi(L) = \theta(L)$$

Logo, os pesos ψ_j do modelo na forma de choques aleatórios podem ser obtidos diretamente da equação anterior.

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

c) Forma invertida (auto-regressivo infinito)

De

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \psi(L) \varepsilon_t$$

obtemos

$$\psi^{-1}(L) X_t = \varepsilon_t$$

que é equivalente a

$$\pi(L) X_t = \varepsilon_t$$

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

c) Forma invertida (auto-regressivo infinito)

em que

$$\pi(L) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j L^j.$$

Ainda,

$$\pi(L) = \psi^{-1}(L)$$

ou, equivalentemente

$$\pi(L)\psi(L) = 1.$$

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

c) Forma invertida (auto-regressivo infinito) (cont.)

Mas, lembrando que

$$\varphi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

ou seja

$$\varphi(L)[\theta(L)]^{-1}X_t = \varepsilon_t$$

vem que

$$\pi(L) = \varphi(L)[\theta(L)]^{-1}$$

MODELOS ARIMA

Formas do modelo ARIMA

c) Forma invertida (auto-regressivo infinito) (cont.)

Logo,

$$\varphi(L) = \theta(L)\pi(L)$$

assim, os pesos π_j podem ser obtidos diretamente da equação anterior.

Teste para mais de uma raiz unitária

INTRODUÇÃO

Algumas séries econômicas podem apresentar mais de uma raiz unitária. Ou seja, podem ser integradas de ordem superior a 1.

Dessa forma, se torna interessante conhecer alguma metodologia que nos auxilie a testar a existência de mais de uma raiz unitária numa série.

Aplicar o teste DF (ou ADF) à primeira diferença de uma série de interesse, digamos y_t , para testar a presença de uma segunda raiz unitária, o que implicaria substituir y_t por Δy_t nas equações

INTRODUÇÃO

$$y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{a})$$

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{b})$$

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{c})$$

NÃO É UM PROCEDIMENTO CORRETO, do ponto de vista estatístico.

INTRODUÇÃO

Isso se deve ao fato do teste DF (ou ADF), sob a hipótese nula, afirmar que a série apresenta 1 raiz unitária (série não estacionária) contra a hipótese alternativa que a série não apresenta raiz unitária (série não integrada).

Assim sendo, hipóteses que envolvam ordens de integração superiores a 1 não podem ser verificadas por meio do teste DF (ou ADF).

INTRODUÇÃO

OBSERVAÇÃO

Apesar de incorreto, muitos autores de trabalhos empíricos aplicam indevidamente os testes DF e ADF a diferenças da série original. Ou seja, podem gerar conclusões, do ponto de vista teórico, completamente equivocadas.

INTRODUÇÃO

Dickey e Pantula (1987) descreveram um procedimento adequado para testar a presença de mais de uma raiz unitária, que consiste na realização de uma sequência de testes, começando pelo maior número de raízes unitárias presumido, reduzindo esse número, um a um, cada vez que a hipótese nula de interesse for sendo rejeitada. Tal procedimento termina quando alguma hipótese nula intermediária não for rejeitada ou quando a última hipótese nula ($\exists!$ raiz unitária) for rejeitada.

INTRODUÇÃO

OBSERVAÇÃO

Como boa parte das séries econômicas apresentam, no máximo, duas raízes unitárias, desenvolveremos, a seguir, o procedimento proposto por Dickey e Pantula (1987) para testar a presença de, no máximo, três raízes unitárias. Para mais detalhes sobre a generalização do procedimento para um número superior a três raízes, vide, por exemplo, Enders (2004, p. 204).

Teste de Dickey e Pantula

Inicialmente estime os parâmetros do modelo

$$\Delta^3 y_t = \beta_1 \Delta^2 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (d)$$

por MQO, por exemplo, e conduza o seguinte teste de hipóteses:

$$H_{01} : \beta_1 = 0$$

$$H_{A1} : \beta_1 < 0 \quad (d.1)$$

Rejeite H_{01} se a estatística de teste for menor que o valor crítico da distribuição τ , para um dado nível de significância.

Teste de Dickey e Pantula

Caso H_{01} tenha sido rejeitada, o que significa que a série de interesse não apresenta 3 raízes unitárias, seria interessante darmos prosseguimento ao procedimento, objetivando testar a presença, agora, de 2 raízes versus 1 raiz. Para tanto, estime os parâmetros do modelo

$$\Delta^3 y_t = \beta_1 \Delta^2 y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (e)$$

e conduza o seguinte teste de hipóteses:

$$H_{02} : \beta_1 < 0 \quad \text{e} \quad \beta_2 = 0$$

$$H_{A2} : \beta_1 < 0 \quad \text{e} \quad \beta_2 < 0 \quad (e.1)$$

Teste de Dickey e Pantula

Rejeite H_{02} se, além da estatística t , associado ao estimador de β_1 , a estatística t , associado ao estimador de β_2 , for inferior ao valor crítico da distribuição τ , para um dado nível de significância, o que significará, nesse caso, que a série de interesse não apresenta 2 raízes unitárias. Assim sendo, seria interessante darmos prosseguimento ao procedimento, objetivando testar a presença, agora, de 1 raiz unitária versus nenhuma raiz unitária.

Teste de Dickey e Pantula

Para tanto, estime os parâmetros do modelo

$$\Delta^3 y_t = \beta_1 \Delta^2 y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-1} + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{f})$$

e conduza o seguinte teste de hipóteses:

$$H_{03} : \beta_1 < 0, \beta_2 < 0 \text{ e } \beta_3 = 0$$

$$H_{A3} : \beta_1 < 0, \beta_2 < 0 \text{ e } \beta_3 < 0 \quad (\text{f.1})$$

Rejeite H_{03} se as razões t associadas aos estimadores dos parâmetros β_1 , β_2 e β_3 forem inferiores ao valor crítico da distribuição τ , para um dado nível de significância.

Teste de Dickey e Pantula

Caso H_{03} tenha sido rejeitada, o que significa concluir que a série de interesse não apresenta raiz unitária, finaliza-se o procedimento.

Teste de Dickey e Pantula

OBSERVAÇÕES

- (i) Verificar a necessidade de inclusão de termos determinísticos nos diversos modelos. Caso os mesmos sejam necessários, utilize, na conclusão dos testes de interesse, os valores críticos provenientes da distribuição adequada.**
- (ii) Dickey e Pantula (1987), no entanto, observam que a constante deve sempre estar presente no último passo do procedimento, sob o argumento de que as séries econômicas, em sua maioria, ou são não estacionárias ou apresentam média diferente de zero.**

Teste de Raiz Unitária

Voltando ao Exercício 2

Levando em consideração o que foi visto até o momento, refaça o teste ADF para verificar se a série temporal dos logaritmos dos preços diários, ao fechamento, das ações da Petrobras, coletadas no período de 02/01/2012 a 04/02/2014, apresenta, no máximo, 2 raízes unitárias.

Referências Bibliográficas

- [1] BUENO, R. L. S. Econometria de Séries Temporais. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 299p.**
- [2] DICKEY, D. A; FULLER, W. A. Distribution of the estimator for auto-regressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74:427-31,1979.**
- [3] DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49:1057-1072, 1981.**

Referências Bibliográficas

[4] DICKEY, D. A.; PANTULA, S. Determining the Order of Differencing in Autoregressive Processes. *Journal of Business and Economic Statistics*, n. 5, p.455-61, 1987.

[5] ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series*. 2 ed. United States: John Wiley & Sons, 2004. 433p.

[6] FAVA, V. L. Testes de raízes unitárias e co-integração. In: *Manual de Econometria*. Coordenadores: Marco A.S. Vasconcelos e Denisard Alves. São Paulo: Atlas. 2000. p.245-252.

Referências Bibliográficas

[7] KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P. C. B.; SCHMIDT, P.; SHIN, Y. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. **Journal of Econometrics**, v. 54, p. 159-178. 1992

[8] MARGARIDO, M. M.; MEDEIROS Jr, H. Teste para mais de uma raiz unitária: uso do *software* SAS na elaboração de uma rotina para o teste Dickey-Pantula. **Pesquisa & Debate, São Paulo**, v. 17, n. 1 (29), p. 149-170, 2006.

[9] PHILLIPS, P. C. B.; PERRON, P. Testing for a unit root in time series regression. **Biometrika, Great Britain**, v. 75, n. 2, p. 335-346. 1988.