Características dos Processos ARMA

Aula 02

Bueno, 2011, Capítulos 2 e 3

Enders, 2009, Capítulo 2.2 a 2.6

Morettin e Toloi, 2006, Capítulo 5.2

Introdução

A expressão geral de uma série temporal, para o caso univariado, é dada por

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, a_t). \tag{1}$$

Para que (1) se torne operacional, é necessário especificarmos três fatos: a forma funcional de $f(\cdot)$, o número de *lags*, e uma estrutura para o termo aleatório.

PROCESSOS ARMA

Processos AR

Se por exemplo, especificarmos uma função linear nos parâmetros com apenas uma defasagem (*lag*) e uma perturbação do tipo ruído branco estacionário (média zero, variância constante e não-autocorrelacionada), o resultado será o seguinte processo autorregressivo de primeira ordem, AR(1):

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + a_t. \qquad (2)$$

O processo autorregressivo de ordem *p*, AR(*p*), pode ser escrito da seguinte forma:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + a_t. \qquad (3)$$

OPERADOR *LAG*

O operador *lag* (ou, operador defasagem), representado por *L*, aplicado a uma variável indexada em *t* (tempo), dá o valor anterior na série temporal.

Tem-se, assim,

$$Lx_t = x_{t-1}$$

$$L^2x_t = x_{t-2}$$

$$(1 - L)x_t = x_t - Lx_t = x_t - x_{t-1} = \Delta x_t$$

em que,

Δ é conhecido como operador diferença.

Processos AR

Usando os resultados do *slide* anterior, em (3), podemos escrever um modelo *AR(p)*, como,

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)x_t = \phi_0 + a_t \qquad (4)$$

em que

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

(polinômio autorregressivo de grau p)

<u>CONDIÇÃO DE ESTACIONARIEDADE</u>

PROCESSO AR(p)

Considere que x_t siga o seguinte processo

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

em que

$$\varepsilon_t \sim RB(0,\sigma_\varepsilon^2).$$

<u>Condições de Estacionariedade</u>:

As raízes da equação característica $\phi(L) = 0$, devem ser, em módulo, maiores do que 1 (raízes fora do círculo unitário).

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(1)

Considere que x_t siga o seguinte processo

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

em que

$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Prova-se que, se

$$|\phi_1| < 1,$$

então x_t será considerado estacionário.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(1) – cont.

Caso $|\phi_1| < 1$, tem-se que

$$E(x_t) = \phi_0 / (1 - \phi_1) = \mu.$$

Ou seja, a esperança incondicional de x_t é constante e invariante no tempo.

Prova-se, também, que, se $|\phi_1| < 1$, a variância incondicional de x_t é constante e igual a

$$\sigma_x^2 = E\left[(x_t - \mu)^2\right] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(1) – cont.

Exercício*

a) Encontre a FACV do processo AR(1), que foi apresentado nos *slides* anteriores.

b) Verifique que a FAC do processo é dada por

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} = \phi_1^h, \quad h = 1, 2, 3...$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(2)

Considere que x_t siga o seguinte processo

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

em que

$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Condições de Estacionariedade

$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(2) – cont.

Baseando-se no resultado anterior, tem-se que

$$E(x_t) = \phi_0 / (1 - \phi_1 - \phi_2).$$

Ou seja, a esperança incondicional de x_t é constante e invariante no tempo.

Prova-se, também, que, sob as mesmas condições do *slide* anterior, a variância incondicional de x_t é constante e igual a

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(2) – cont.

Exercício

Prove que a FACV do processo AR(2) é dada por:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2}, \quad j > 0$$

com

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(2) – cont.

Exercício

Prove que a FAC do processo AR(2) é dada por:

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2}, \quad h = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

com

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad \textbf{e} \qquad \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(p)

Exercício

Prove que a FACV do processo AR(p) é dada por:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{j-p}, \quad j > 0$$

com

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \ldots - \phi_p \rho_p}$$

Do resultado anterior, prove que a FAC é dada por:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \ldots + \phi_p \rho_{j-p}, \quad j > 0$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

FATO

Muitas vezes é difícil fazer a distinção entre processos AR de diferentes ordens com base apenas nos correlogramas. (Pq?)

Função de Auto-correlação Parcial (FACP)

Essa distinção é possível com base no cálculo dos coeficientes de correlação parcial.

Por exemplo, num processo AR(2), o parâmetro ϕ_2 é o coeficiente de correlação parcial entre x_t e x_{t-2}, mantendo x_{t-1} constante.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

PROCESSO AR(p) – cont.

Observação

De maneira geral, esperamos que:

- a FAC empírica de uma série temporal estacionária que seja modelada por um processo AR(p) amorteça para zero;
- já a FACP, esperamos que seja aproximadamente zero para todas as ordens superiores à ordem p do processo.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS AR

Exemplos

Observando os correlogramas, a seguir, indique um modelo inicial para cada série temporal.

Sample: 1 500
Included observations: 500

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.819	0.819	337.32	0.000
		2	0.666	-0.014	560.86	0.000
		3	0.558	0.051	718.32	0.000
		4	0.462	-0.018	826.49	0.000
		5	0.392	0.032	904.47	0.000
		6	0.360	0.082	970.35	0.000
		7	0.315	-0.036	1020.8	0.000
		8	0.256	-0.050	1054.2	0.000
		9	0.196	-0.042	1073.8	0.000
		10	0.149	0.000	1085.2	0.000
		11	0.142	0.089	1095.5	0.000
		12	0.122	-0.042	1103.1	0.000
		13	0.113	0.029	1109.7	0.000
		14	0.103	-0.010	1115.2	0.000
		15	0.077	-0.034	1118.3	0.000
		16	0.051	-0.003	1119.6	0.000
		17	0.028	-0.032	1120.0	0.000
		18	0.021	0.027	1120.3	0.000
		19	-0.005	-0.073	1120.3	0.000
		20	-0.029	-0.019	1120.7	0.000

Sample: 1 500
Included observations: 500

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.874	0.874	384.43	0.000
		2	0.819	0.232	722.53	0.000
		3	0.756	0.015	1011.3	0.000
		4	0.705	0.023	1262.8	0.000
		5	0.665	0.048	1487.2	0.000
		6	0.623	0.003	1684.6	0.000
		7	0.566	-0.086	1847.7	0.000
		8	0.522	-0.002	1986.8	0.000
		9	0.483	0.019	2106.3	0.000
		10	0.456	0.039	2212.8	0.000
		11	0.422	-0.021	2304.3	0.000
		12	0.378	-0.068	2377.7	0.000
		13	0.350	0.034	2440.9	0.000
		14	0.317	-0.011	2492.9	0.000
		15	0.302	0.042	2540.0	0.000
		16	0.297	0.070	2585.7	0.000
		17	0.278	-0.017	2626.0	0.000
		18	0.275	0.049	2665.2	0.000
		19	0.265	0.003	2701.8	0.000
		20	0.242	-0.069	2732.4	0.000

PROCESSOS ARMA

Processos MA

Voltando à expressão geral de uma série temporal,

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, a_t). \qquad (1)$$

É possível assumir que o termo de perturbação a_t tenha uma estrutura expressa por

$$a_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (5)$$

em que

ε_t é um processo ruído branco estacionário.

Ou seja, aqui estamos assumindo que a_t não é um processo ruído branco.

Processos MA

Dessa forma, uma possível especificação para o processo x_t é dada por um processo de médias móveis de ordem q, MA(*q*):

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}. \qquad (6)$$

Usando os resultados do *slide* 5, em (6), podemos escrever

$$x_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t \qquad (7)$$

em que

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q$$

(polinômio de médias móveis de grau q)

As equações (6) e (7) especificam um processo MA(q) *puro*.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1)

O processo MA(1) é dado por

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

em que

$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Não é difícil mostrar que

$$E(x_t) = E(\theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = \theta_0.$$

Ou seja, a esperança incondicional de x_t é constante e invariante no tempo.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Ainda, a variância incondicional de

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

é dada por:

$$\gamma_0 = Var(x_t) = Var(\theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = Var(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) =$$

$$= Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) - 2\theta_1 Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Ainda, a FACV é dada por

$$\gamma_\tau = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2, & \tau = 0 \\ -\theta_1\sigma_\varepsilon^2, & \tau = 1 \\ 0, & \tau \geq 2 \end{cases}$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Baseado no resultado anterior, não é difícil ver que a FAC fica dada por

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)} \qquad \rho_2 = \rho_3 = \ldots = 0$$

Ou seja, no caso do MA(1) a FAC trunca no *lag* 1.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Observação

O processo MA(1) pode ser invertido para dar ε_t como uma série infinita em função de x_t, x_{t-1}, ...

$$\varepsilon_t = x_t + \theta_1 x_{t-1} + \theta_1^2 x_{t-2} + \dots$$

ou, ainda,

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} - \dots$$

que é um processo AR(∞).

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Observação (cont.)

Todavia, a equação

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} - \ldots$$

só fará sentido se

$$|\,\theta_1\,| < 1.$$

Se tal restrição não for observada, então os valores mais distantes de x_t terão um maior efeito no valor presente.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Observação (cont.)

A condição $|\theta_1| < 1$, é conhecida por condição de invertibilidade. É semelhante à condição de estacionariedade para um processo AR(1), mas a estacionariedade de um processo MA(1) não impõe nenhuma condição para θ_1.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Observação (cont.)

Ainda, como a equação $x_t = \varepsilon_t - \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} - \ldots$ denota um $AR(\infty)$, as auto-correlações parciais não caem bruscamente, mas, decrescem, amortecendo gradualmente para zero; mas, como vimos anteriormente, as auto-correlações são iguais a zero a partir da segunda, inclusive.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(1) – cont.

Observação (cont.)

As propriedades de um processo MA(1) puro são exatamente ao contrário das de um processo AR(1) puro. Ou seja, a FAC de um processo MA(1) é nula após o *lag* 1 e a FACP decai exponencialmente para zero.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(q)

O processo MA(q) é dado por

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

em que

$$\varepsilon_t \sim RB(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

Condições de Invertibilidade:

As raízes da equação característica $\theta(L) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, em que

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q.$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(q) – cont.

Observação

Em geral, num processo estacionário MA(*q*), os *q* primeiros coeficientes da FAC são diferentes de zero, e os restantes iguais a zero. Já os coeficientes da FACP, apresentam um decaimento amortecido para zero.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

PROCESSO MA(2)

Exercício

Considere o processo MA(2) dado por

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

em que

$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

(i) Encontre a média, a variância, a facv e a fac de x_t.

(ii) Quais devem ser as condições de invertibilidade de um processo MA(2)? Justifique a sua resposta.

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS MA

Exemplos

Observando os correlogramas, a seguir, indique um modelo inicial para cada série temporal.

Sample: 2 250
Included observations: 249

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.519	-0.519	67.815	0.000
		2	0.140	-0.177	72.755	0.000
		3	-0.152	-0.224	78.628	0.000
		4	0.105	-0.098	81.466	0.000
		5	-0.035	-0.041	81.781	0.000
		6	-0.092	-0.192	83.958	0.000
		7	0.008	-0.212	83.975	0.000
		8	0.002	-0.192	83.975	0.000
		9	0.140	0.022	89.080	0.000
		10	-0.136	-0.064	93.897	0.000
		11	0.080	-0.034	95.580	0.000
		12	0.004	0.045	95.585	0.000
		13	0.011	0.027	95.618	0.000
		14	-0.046	0.000	96.168	0.000
		15	-0.015	0.002	96.226	0.000
		16	-0.008	-0.033	96.241	0.000
		17	0.026	-0.007	96.428	0.000
		18	0.012	0.035	96.464	0.000
		19	-0.065	-0.043	97.624	0.000
		20	0.074	-0.014	99.103	0.000

Sample: 1 500
Included observations: 500

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.465	0.465	108.83	0.000
		2	-0.037	-0.323	109.50	0.000
		3	0.010	0.261	109.56	0.000
		4	0.038	-0.165	110.29	0.000
		5	0.043	0.174	111.21	0.000
		6	0.057	-0.079	112.85	0.000
		7	0.051	0.105	114.19	0.000
		8	0.070	0.003	116.70	0.000
		9	0.058	0.025	118.39	0.000
		10	0.008	-0.026	118.43	0.000
		11	0.002	0.026	118.43	0.000
		12	0.027	0.004	118.79	0.000
		13	-0.022	-0.073	119.05	0.000
		14	-0.072	-0.017	121.75	0.000
		15	-0.011	0.036	121.81	0.000
		16	0.061	0.032	123.75	0.000
		17	0.049	0.002	125.03	0.000
		18	0.014	0.008	125.13	0.000
		19	0.011	0.016	125.19	0.000
		20	-0.073	-0.146	127.98	0.000

PROCESSOS ARMA

Processos ARMA

Voltando à expressão geral de uma série temporal,

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, ..., a_t). \qquad (1)$$

e combinando as equações

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + ...+ \phi_p x_{t-p} + a_t. \qquad (3)$$

e

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \qquad (6)$$

teremos um processo misto, autorregressivo e de médias móveis, ARMA(p, q):

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + ...+ \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (8)$$

Processos ARMA

Ainda, utilizando os resultados do *slide* 5, em (8), podemos escrever um modelo *ARMA(p, q)*, como,

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p)x_t = \alpha + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t \qquad (9)$$

em que

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS ARMA

PROCESSO ARMA(p,q)

Observação

- **A estacionariedade do processo exige que as raízes de $\phi(L)$ se situem fora do círculo unitário;**

- **A invertibilidade requer a mesma condição para as raízes de $\theta(L)$;**

- **Verificadas estas condições, o processo ARMA(p, q) pode ser expresso quer como um processo AR puro de ordem infinita quer como um processo MA puro de ordem infinita.**

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS ARMA

PROCESSO ARMA(1,1)

O processo misto, sem constante, de ordem mais baixa é o processo ARMA(1, 1):

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Para esse caso, admitindo $|\phi| < 1$, é possível provar que:

$$\gamma_0 = \frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}\sigma_\varepsilon^2$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS ARMA

PROCESSO ARMA(1,1) – cont.

Já a FACV do processo ARMA(1, 1) é dada por

$$\gamma_1 = \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{1 - \phi^2}\sigma_\varepsilon^2 \qquad e \qquad \gamma_h = \phi\gamma_{h-1}, \quad h = 2, 3, \ldots$$

E a FAC do processo fica dada por,

$$\rho_1 = \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{1 - 2\phi\theta + \theta^2} \qquad \rho_h = \phi\rho_{h-1} \qquad h = 2, 3, \ldots$$

PROPRIEDADES DOS PROCESSOS ARMA

PROCESSO ARMA(1,1) – cont.

Observação

- ρ_1 depende tanto do parâmetro da parte AR como do parâmetro da parte MA.
- Os coeficientes seguintes decrescem exponencialmente, com uma taxa de decréscimo dada pelo parâmetro AR.
- Contudo, e por comparação com o processo AR puro, os coeficientes da FACP não decaem rapidamente, mas têm um decrescimento amortecido para zero.

RESUMÃO

	Padrões de Correlação	
Processo	FAC	FACP
AR(p)	Infinita: decai para zero (exponencialmente ou segundo uma senóide amortecida).	Finita: decai bruscamente para zero a partir do *lag* p.
MA(q)	Finita: decai bruscamente para zero a partir do *lag* q.	Infinita: decai para zero (exponencialmente ou segundo uma senóide amortecida).
ARMA(p, q)	Infinita: decai para zero (exponencialmente ou segundo uma senóide amortecida).	Infinita: decai para zero (exponencialmente ou segundo uma senóide amortecida).

EXERCÍCIOS

Exercício 1

Considere o modelo

$$y_t = -0,2y_{t-1} + 0,48y_{t-2} + \varepsilon_t + 0,6\varepsilon_{t-1} - 0,16\varepsilon_{t-2},\ t = 1, 2, ...$$

a) Escreva o modelo de interesse, utilizando os polinômios característicos.

b) Encontre as raízes dos polinômios característicos.

c) Escreva o modelo de interesse na forma fatorada. Comente o resultado encontrado.

Exercício 2

Considere o processo

$$y_t = 0{,}5y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}5\varepsilon_{t-1},\ t = 1, 2, \ldots$$

(a) O processo é estacionário?

(b) O processo é invertível?

(c) A memória deste processo é semelhante à memória de um processo ruído branco?

Exercício 3

Considere o processo

$$y_t = \varepsilon_t - 0{,}6\varepsilon_{t-1} - 0{,}1\varepsilon_{t-2}, \ t = 1, 2, \ldots$$

Verifique se as condições de estacionariedade e invertibilidade deste processo estão satisfeitas.

Leitura Complementar I

Modelos Lineares Estacionários

Morettin e Toloi, 2006, Capítulo 5.2

Modelos Lineares Estacionários

Os modelos que aqui serão estudados são casos particulares de um modelo de filtro linear.

Tal modelo supõe que a série temporal seja gerada através de um filtro linear (ou sistema linear), cuja entrada é um ruído branco (RB).

Na figura, a seguir, temos o exemplo de um esquema que representa um filtro linear com série de entrada a_t, função de transferência $\psi(L)$ e série de saída Z_t.

Modelos Lineares Estacionários

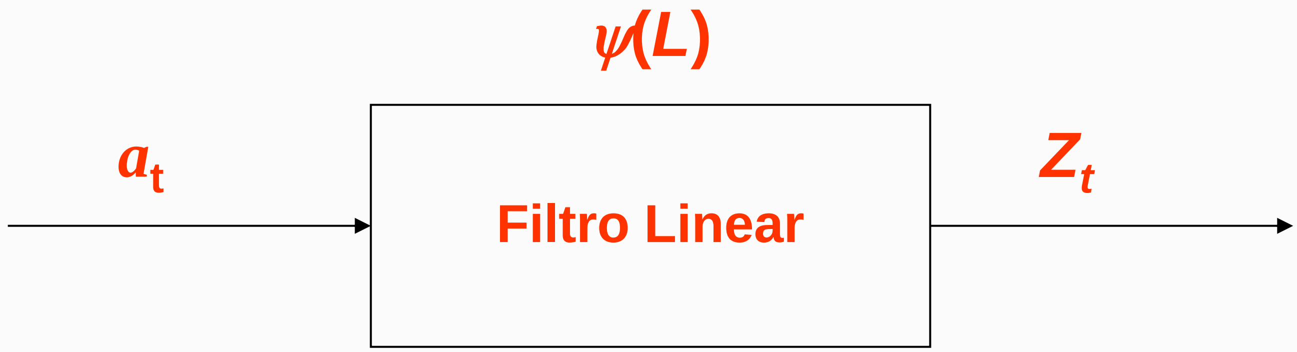

Figura 1 - Filtro linear com série de entrada a_t, função de transferência $\psi(L)$ e série de saída Z_t.

Modelos Lineares Estacionários

Apenas para lembrar

$$E(a_t) = 0, \forall t,$$

$$Var(a_t) = \sigma_a^2, \forall t,$$

$$Cov(a_t, a_s) = E(a_t a_s) = 0, \; s \neq t$$

Ou seja, a_t é um RB estacionário.

Modelos Lineares Estacionários

Formalmente, temos que

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots =$$

$$= \mu + a_t + \psi_1 L a_t + \psi_2 L^2 a_t + \ldots = \mu + \psi(L) a_t \quad (1)$$

em que

μ – **parâmetro determinando o nível da série**

L – ***operador defasagem***

$\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots$ **é denominada *função de transferência* do filtro.**

Modelos Lineares Estacionários

- Z_t, dado em (1), é um processo linear (discreto).

- Se a seqüência de pesos $\{\psi_j,\ j \geq 1\}$ for finita ou infinita e convergente, o filtro é estável (somável) e Z_t é estacionária. Neste caso, μ é a média do processo.

- Caso contrário Z_t é não estacionária e μ não tem significado específico, a não ser como um ponto de referência para o nível da série.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

A condição anterior também pode ser expressa na condição de que $\psi(L)$, que é a função geradora dos pesos ψ, deve convergir para $|L| \leq 1$, isto é, dentro de e sobre o círculo unitário. Esse resultado é discutido em detalhes no Apêndice A3.1 do livro de Box, Jenkins e Reinsel (1994, pag. 85-86).

Modelos Lineares Estacionários

Não é difícil, de (1), ver que,

$$E(Z_t) = \mu + E\left(a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right)$$

e como

$$\mathbf{E}(a_t) = 0\text{, para todo } t,$$

temos que

$$\mathbf{E}(Z_t) = \mu$$

se a série

$$\Sigma \psi_j$$

convergir.

Modelos Lineares Estacionários

Também não é difícil ver que a facv, γ_j, de Z_t é dada por

$$\gamma_j = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j},$$

com $\psi_0 = 1$.

Modelos Lineares Estacionários

Em particular, para j = 0, obtemos a variância de Z_t,

$$\gamma_0 = Var(Z_t) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 .$$

A condição para que as duas expressões anteriores existam é que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty .$$

Modelos Lineares Estacionários

Assim verificamos que a média e a variância de Z_t são constantes e a covariância só depende de j, logo, Z_t é estacionária.

Modelos Lineares Estacionários

Podemos escrever

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

em uma forma alternativa, como uma soma ponderada de seus valores passados mais um ruído a_t:

$$\tilde{Z}_t = \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{Z}_{t-j} + a_t$$

Segue-se que

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j L^j \right) \tilde{Z}_t = a_t$$

Modelos Lineares Estacionários

ou

$$\pi(L)\tilde{Z}_t = a_t$$

em que $\pi(L)$ é o operador

$$\pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots$$

Modelos Lineares Estacionários

Mas,

$$\tilde{Z}_t = \psi(L)a_t \ ,$$

de modo que

$$\pi(L)\tilde{Z}_t = a_t \Leftrightarrow \pi(L)\psi(L)a_t = a_t \, ,$$

ou seja,

$$\pi(L)\psi(L) = 1 \Leftrightarrow \pi(L) = \psi^{-1}(L)$$

Esta relação pode ser usada para obter os pesos π_j em função dos pesos ψ_j e vice-versa.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 1

Considere o processo

$$Z_t = \mu + \psi(L)a_t$$

em que

$\psi_j = (\phi)^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots,$

$\psi_0 = 1;$

$|\phi| < 1$; e

a_t como definido anteriormente.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 1 (cont.)

Temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j = \frac{1}{1-\phi},$$

logo, E(Z_t) = μ.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 1 (cont.)

Ainda, dado que $\Sigma\psi_j^2$ converge, obtemos

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$$

e

$$\gamma_j = \frac{\phi^j}{1-\phi^2}\sigma_a^2, \quad j \geq 0$$

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 2

Para o modelo dado no Exemplo 1, considere, agora, que $\phi = 1$ e $\mu = 0$; então

$$Z_t = a_t + a_{t-1} + \ldots$$

Não é difícil ver que $\Sigma \psi_j$ não converge. Dessa forma, o processo será não-estacionário.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 3

O modelo dado no Exemplo 2 deriva da equação

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t.$$

Assim, da equação anterior, não é difícil observar que

$$Z_t - Z_{t-1} = a_t.$$

Ou seja, a primeira diferença de Z_t é um RB estacionário. Dizemos que Z_t é um passeio aleatório; seu valor no instante t é uma soma de choques aleatórios que entraram no sistema desde o passado remoto até o instante t.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exercício

Considere o processo

$$Z_t = \psi(L)a_t$$

em que

$\psi_j = (\phi)^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots,$

$\psi_0 = 1$; e

$|\phi| < 1.$

Encontre $\pi(L)$ e escreva $\pi(L)Z_t = a_t$. Interprete.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 4

Considere o processo

$$Z_t = a_t + \theta a_{t-1},$$

ou seja,

$$\psi_1 = \theta, \; \psi_j = 0, \; j > 1.$$

Assim, é possível afirmar que o processo é estacionário para qualquer valor de θ?

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 5

Utilizando o modelo proposto no Exemplo 4, vejamos como deve ser θ para que possamos escrever Z_t em termos de seus valores passados.

$$Z_t = (1+\theta L)a_t \Rightarrow \frac{1}{(1+\theta L)} Z_t = a_t \Rightarrow (1-\theta L+\theta^2 L^2 - \dots)Z_t = a_t.$$

Assim, vem que

$$\pi(L) = 1-\theta L+\theta^2 L^2 - \dots = \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta L)^j \quad e \quad \pi_j = -(-\theta)^j, \, j \geq 1$$

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Exemplo 5 (cont.)

A seqüência formada pelos pesos π_j será convergente se $|\theta| < 1$ e neste caso dizemos que o processo é invertível. Segue-se que para o processo ser invertível o operador $\pi(L)$ deve convergir para $|L| \leq 1$, e

$$Z_t = \theta Z_{t-1} - \theta^2 Z_{t-2} + \ldots + a_t.$$

Proposição

Um processo linear geral será estacionário se $\psi(L)$ convergir para $|L| \leq 1$; será invertível se $\pi(L)$ convergir para $|L| \leq 1$. A demonstração deste fato pode ser encontrada, por exemplo, em Box, Jenkins & Reinsel (1994).

Leitura Complementar II

O Teorema de Wold

Teorema de Wold

Todo processo estacionário de segunda ordem, puramente não-determinístico, pode ser escrito como um Polinômio Linear Geral (PLG), dado a seguir:

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \qquad \text{(a)}$$

com $\{\varepsilon_t\}$ uma sequência de v.a. não correlacionadas, de média zero e variância σ^2 constante (ruído branco estacionário - RB) e ψ_j são constantes satisfazendo $\Sigma \psi_j^2 < \infty$.

Teorema de Wold

Ainda,

$$E(X_t) = \mu \qquad\qquad Var(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$$

$$\gamma_h = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}, \qquad \sum \psi_j^2 < \infty$$

$$\rho_h = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$$

Teorema de Wold

Processos ARMA são casos particulares de (a).

Exemplos:

$$\psi_1 = -\theta,\ \ \psi_j = 0,\ \ j > 1 \Rightarrow X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \sim MA(1),$$

$$\rho_1 = {(-\theta)}\Big/{(1+\theta)^2},\ \rho_h = 0,\ \ j > 1;$$

$$\psi_j = \phi^j \Rightarrow X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \sim AR(1),$$

$$|\phi| < 1,\ \ \ \rho_h = \phi^h;$$

$$\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1} \Rightarrow X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \sim ARMA(1,1),$$

$$\rho_1 = {(1-\phi\theta)}\Big/{(1+\theta^2 - 2\phi\theta)},\ \ \rho_h = \phi\rho_{h-1},\ \ h > 1;$$

Exercícios

Exercício 1

O processo

$$Z_t = \psi(L)a_t$$

em que

$\psi_j = (\phi)^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots,$

$\psi_0 = 1$; e

$|\phi| < 1.$

é invertível?

Exercício 2

Considere o seguinte processo

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

com

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_j = (\phi + \theta)\phi^{j-1}, \; j \geq 1$$

$\varepsilon_t \sim RB(0\,;\,\sigma^2)$

Exercício 2 (cont.)

a) O processo é estacionário? Justifique.

b) O processo é invertível? Justifique.

Exercício 3

De acordo com as suposições feitas no exercício anterior para obter a estacionariedade do processo, encontre a FACV e a FAC do mesmo.

Exercício 4

O processo

$$X_t = 0{,}80\,X_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}80\,\varepsilon_{t-1}$$

em que

$$\varepsilon_t \sim \boldsymbol{NID}(0;1)$$

é estacionário e/ou invertível? Justifique a sua resposta. Construa a FAC teórica desse processo. Ainda, simule esse processo e construa a FAC do processo simulado. Compare e comente os resultados.