Modelos para Séries Temporais
Aula 1

Morettin e Toloi, 2006, Capítulo 2
Morettin, 2011, Capítulo 2
Bueno, 2011, Capítulo 2

Modelos para Séries Temporais

Os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, isto é, processos controlados por leis probabilísticas.

Definition: Seja T um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família

$$X = \{X(t), t \in T\},$$

tal que, para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Mais rigorosamente, $X(t)$ é uma função de dois argumentos:

$$X(t, \omega)$$

para $t \in T$ e $\omega \in \Omega$.

Para cada $t \in T$ fixado, $X(t, \omega) \equiv X(\omega)$ é uma variável aleatória definida sobre o espaço amostral Ω.

Para cada $\omega \in \Omega$ fixado, $X(t, \omega) = X(t)$, é uma função de t, ou seja, uma realização ou trajetória do processo, ou ainda, uma **série temporal**.

Vale notar que ao se definir um processo estocástico é necessário introduzir três características:

(a) O espaço onde está definido o processo;
(b) O conjunto dos índices T;
(c) A estrutura de dependência da v.a., $X(t), t \in T$.

O conjunto de valores $\{X(t), t \in T\}$ é chamado de espaço de estados, S, do processo estocástico e cada valor de $X(t)$ pode ser chamado de estado.

O espaço de estados pode ser discreto ou contínuo.

- No caso discreto $X(t)$ pode representar uma contagem, como o número de transações de uma ação, durante um dia.

- No caso contínuo, $X(t)$ pode representar uma medida que varia continuamente, como o retorno de um ativo ou volume negociado, em cada dia.

O conjunto dos índices T também pode ser discreto ou contínuo.

- Caso o conjunto seja finito ou enumerável, como por exemplo $T = \mathbb{Z}$, o processo diz-se com parâmetro discreto.

- Caso o conjunto seja um intervalo de $\mathbb{R}$, por exemplo, teremos um processo com parâmetro contínuo.

Como o processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$, é uma variável aleatória, então torna-se bastante interessante obter a distribuição conjunta de

$$\{X(t_1), \ldots, X(t_k)\}.$$

O problema é que na prática só dispomos de uma única realização do processo. Assim, para que possamos obter a distribuição conjunta, certas restrições serão impostas.

No caso dos processos estocásticos, as restrições que devem ser impostas são de dois tipos

(a) Na heterogeneidade temporal; e

(b) Na memória do processo.

Restrição na Heterogeneidade Temporal

Assumiremos que a distribuição conjunta é invariante por translações. Ou seja, data um subconjunto de índices T, por exemplo $\{1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m\}$, a restrição imposta à heterogeneidade temporal, em nosso caso, é que as distribuições conjuntas de

$$\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m)\}$$

e

$$\{X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \ldots, X(t_m + \tau)\}$$

são idênticas, para qualquer inteiro $\tau \geq 1$.

Restrição na Memória do Processo

Com relação memória do processo estocástico, a primeira ideia é fazer com que o processo não tenha memória, isto é, seja não correlacionado ou independente.

A restrição de independência é muito forte e pouco plausível, uma vez que séries temporais econmicas apresentam algum tipo de dependência temporal.

Assim, uma forma de abrandar essa suposição é fazer com que para instantes de tempo muito afastados não exista correlação. Dessa forma, o processo tem memória, mas tal memória vai diminuindo com o aumento dos intervalos entre os instantes de tempo.

Processo estacionário em covariância

Um processo estocástico $\{X(t), t = 1, 2, \ldots\}$, com segundo momento finito

$$E[X(t)^2] < \infty,$$

diz-se estacionário em covariância[1] se, e somente se,

(i) $E\{X(t)\} = \mu$, constante, $\forall t$,

(ii) $Var\{X(t)\} = E\{[X(t) - \mu]^2\} = \sigma^2$, constante, $\forall t$, e

(iii) A função de covariância

$$\gamma(\tau) = Cov\{X(t), X(t+\tau)\} = E\{[X(t) - \mu][X(t-\tau) - \mu]\},$$

para qualquer t e qualquer $\tau \geq 1$, depende somente de τ, e não de t.

[1] Ou fracamente estacionário, estacionário de segunda ordem, estacionário no sentido amplo.

Example

Considere o seguinte processo:

$$X(t) = \xi(t) \qquad t = 1, 2, \dots$$

onde $\xi(t) \sim NID(0, \sigma^2)$.

a) Adote 4 para a variância de $\xi(t)$, isto é $\sigma^2 = 4$.
b) Simule $T = 1000$ observações, isto é, $t = 1, \dots, 1000$,
c) $X(t)$ é estacionário de segunda ordem?

Ruído branco

Dizemos que a sequência aleatória

$$\{\epsilon(t), t \in \mathbb{Z}\},$$

é um ruído branco[2] se as variáveis aleatórias $\epsilon(t)$ são não correlacionadas, isto é, $Cov\{\epsilon(t), \epsilon(t-\tau)\} = 0$, para todo $\tau \neq 0$.

Um tal processo será estacionário se

$$E\{\epsilon(t)\} = \mu \quad \text{e} \quad Var\{\epsilon(t)\} = \sigma^2$$

para todo t.

[2] Termo emprestado da engenharia de processamento de sinais.

Função de autocovariância

Considered o processo estocástico discreto $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$.

A função de autocovariância é definida por

$$\gamma(\tau) = Cov\{X(t), X(t-\tau)\}.$$

Quando $E\{X(t)\} = 0$, segue que

$$\gamma(\tau) = Cov\{X(t), X(t-\tau)\} = E\{X(t)X(t-\tau)\}.$$

Proposição: $\gamma(\tau)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\gamma(0) > 0$;

(ii) $\gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$;

(iii) $|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$.

Função de autocorrelação

Tendo calculado os valores da Função de Autocovariância, $\gamma(\tau)$, os coeficientes de autocorrelação para uma série temporal são definidos por

$$\begin{aligned}\rho(\tau) &= Corr\{X(t), X(t-\tau)\} \\ &= \frac{Cov\{X(t), X(t-\tau)\}}{\sqrt{Var\{X(t)\}}\sqrt{Var\{X(t-\tau)\}}}\end{aligned}$$

Se a série temporal for estacionária, $Var\{X(t)\} = Var\{X(t-\tau)\}$, então

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

A expressão anterior é conhecida por função de autocorrelação, FAC, representação gráfica da FAC dá-se o nome de correlograma.

Função de autocorrelação amostral

Como na prática, temos somente uma única realização de um processo estocástico (isto é, uma única série temporal observada), podemos calcular apenas a função de autocorrelação amostral, dada por:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(x_t - \bar{x})(x_{t-\tau} - \bar{x})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}$$

Bartlett (1946)

Bartlett (1946) mostrou que se uma série temporal apresentar um comportamento puramente aleatório então os estimadores dos coeficientes de auto-correlação $\hat{\rho}(t)$ terão distribuição aproximadamente normal com média zero e variância $1/n$, em que n é o tamanho da amostra.

Assim, não é difícil demonstrar que o intervalo de confiança bicaudal, com por exemplo 95% de confiança, para qualquer $\rho(t)$será dado por:

$$\hat{\rho}(t) \pm 1,96/\sqrt{n}.$$

FAC e estacionariedade

Um processo estacionário pode ser identificado por sua FAC.

Dica:
Um processo estacionário tem FAC que vai para zero "rapidamente".

O que é "rapidamente"?
A dependência em relação ao passado diminui exponencialmente, por exemplo.

Observação:
A função de autocorrelação (FAC) proporciona evidências de uma série temporal não-estacionária. Tipicamente, séries temporais não-estacionárias apresentam FACs com valores altos e significativos para muitas defasagens.

Exercício 1

Suponha que a sequência $\{y_t, t = 1, 2, \ldots\}$ tenha sido gerada por

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \epsilon_t$$

em que:

(i) $\delta_1 \neq 0$;

(ii) $\{\epsilon_t, t = 1, 2, \ldots,\}$ é uma sequência i.i.d. com média zero e variância igual a σ^2.

Verifique se:

(a) $\{y_t\}$ é estacionária;

(b) $\{yt - E(y_t)\}$ é estacionária.

(c) $\{y_t - y_{t-1}\}$ é estacionária.

(d) Qual a intuição dos procedimentos (b) e (c)?

Exercício 2

Suponha que a sequência $\{y_t, t = 0, 1, \ldots\}$ tenha sido gerada por

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

em que:

(i) $y_0 = 0$;

(ii) $\{\epsilon_t, t = 1, 2, \ldots,\}$ é uma sequência i.i.d. com média zero e variância igual a σ^2.

$\{y_t\}$ é estacionária?
$\{y_t - y_{t-1}\}$ é estacionária?

Exercício 3

Suponha que a sequência $\{y_t, t = 0, 1, \ldots\}$ tenha sido gerada por

$$y_t = \epsilon_t - \alpha\epsilon_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

em que

- α é um parâmetro diferente de zero;
- $\{\epsilon_t\}$ é uma sequência de variávies aleatórias i.i.d. com média zero e variância igual a σ^2.

O processo $\{y_t\}$ é estacionário de segunda ordem?

Exercício 4

Suponha que a sequência $\{y_t, t = 0, 1, \ldots\}$ tenha sido gerada por

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + \epsilon_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

em que

- α é um parâmetro diferente de zero;
- $y_0 = \delta$, (δ é uma constante);
- $\{\epsilon_t\}$ é uma sequência de variávies aleatórias i.i.d. com média zero e variância igual a σ^2.

O processo $\{y_t\}$ é estacionário?
O processo $\{y_t - y_{t-1}\}$ é estacionário?

Exercício 5

Suponha que a sequência $\{y_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ tenha sido gerada por

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t,$$

em que $y_0 = 0$ e $\{\epsilon_t\}$ é uma sequência de variávies aleatórias i.i.d. com média zero e variância igual a σ^2.

a) Adote um valor para ϕ inferior a -1, simule 1000 observações para o processo, construa o gráfico da série, o correlograma e comente os resultados encontrados.
b) Adote um valor para ϕ superior a $+1$, simule 1000 observações para o processo, construa o gráfico da série, o correlograma e comente os resultados encontrados.
c) Adote um valor para ϕ entre -1 e $+1$ (exceto os extremos), simule 1000 observações para o processo, construa o gráfico da série, o correlograma e comente os resultados encontrados.
d) Sob quais condições você acredita que $\{y_t\}$ seja estacionária? Justifique adequadamente a sua resposta.