<u>Exercício 1</u>

a) $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (x_1 \ x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x} = 139,25$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x_1 \ x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{x} = 99,25$$

c) Defina: $\underset{\sim}{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ e note que $\sum_{i=1}^{n} x_i = (x_1 \, x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{i}'\underset{\sim}{x}$$

Então podemos escrever $\bar{x} = \frac{1}{n}\underset{\sim}{i}'\underset{\sim}{x}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\bar{x} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{i}\,\bar{x}$$

$$= \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{i}\,\frac{1}{n}\,\underset{\sim}{i}'\underset{\sim}{x} = \underbrace{\left[\underset{\sim}{I} - \frac{1}{n}\underset{\sim}{i}\,\underset{\sim}{i}'\right]}_{\underset{\sim}{N}}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x}$$

Note que $N' = N$ (simétrica) $\hookrightarrow$ Matriz de desvios da média.

$N^2 = N$ (idempotente)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)\begin{pmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{i}'\cdot(\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x}) = (\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x})'\,\underset{\sim}{i} = 0$$

d) $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (x_1-\bar{x} \quad x_2-\bar{x} \quad \cdots \quad x_n-\bar{x})\begin{pmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{pmatrix} =$$

$$= (\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x})'(\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x}'\,\underset{\sim}{N}'\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x} \overset{N \text{ simétrica}}{=} \underset{\sim}{x}'\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x} \overset{N \text{ idempotente}}{=} \underset{\sim}{x}'\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x}$$

$$= 27{,}8$$

e) $$\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})] = (x_1-\bar{x} \quad x_2-\bar{x} \quad \cdots \quad x_n-\bar{x})\cdot\begin{pmatrix} y_1-\bar{y} \\ y_2-\bar{y} \\ \vdots \\ y_n-\bar{y} \end{pmatrix} = (\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x})'(\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{y})$$

$$= \underset{\sim}{x}'\,\underset{\sim}{N}'\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}'\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'\,\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{x} = -32{,}35$$

Exercício 2

a) $1,8 = \beta_0 + 4\beta_1 + 4\beta_2 + \varepsilon_1$

$2,4 = \beta_0 + 6\beta_1 + 5\beta_2 + \varepsilon_2$

$2,9 = \beta_0 + 6\beta_1 + 7\beta_2 + \varepsilon_3$

$3,0 = \beta_0 + 7\beta_1 + 6\beta_2 + \varepsilon_4$

$3,5 = \beta_0 + 8\beta_1 + 7\beta_2 + \varepsilon_5$

Podemos ~~reescrever~~ reescrever o sistema acima na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1,8 \\ 2,4 \\ 2,9 \\ 3,0 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix} \iff Y = X\beta + \varepsilon$$

b) $$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 31 & 29 \\ 31 & 201 & 186 \\ 29 & 186 & 175 \end{pmatrix} \qquad \det(X'X) = 107$$

Como o determinante de $X'X$ é diferente de zero, temos que a matriz $X'X$ é inversível.

c) $$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 5,411 & -0,289 & -0,588 \\ -0,289 & 0,317 & -0,289 \\ -0,588 & -0,289 & 0,411 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 13,6 \\ 88 \\ 82 \end{pmatrix}$$

d) $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{pmatrix} -0,1832 \\ 0,2654 \\ 0,2168 \end{pmatrix}$$

Para gerar o R^2 com o software de matrizes faça os seguintes passos

$$SST = y'Ny = 1,668$$

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}$$

$$SSR = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = 0,0148$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} = 0,9911$$

e) $(X'X) = \begin{pmatrix} 5 & 31 & 62 \\ 31 & 201 & 402 \\ 62 & 402 & 804 \end{pmatrix}$

$\det(X'X) = 0$

$\to$ $X'X$ não é inversível

Note que a terceira coluna de X é o dobro da segunda. Esse é o problema da Multicolinearidade perfeita.

3. a)

$\beta_1 < 0$. É esperado que uma menor taxa de juros impacte positivamente o consumo e investimento, aumentando o PIB efetivo, e por consequência, o hiato do produto (PIB efetivo - PIB potencial).

$\beta_2 > 0$. É esperado que com uma maior taxa de câmbio (mais desvalorizada), importe-se menos no Brasil devido a uma perda de poder de compra no mercado internacional. De uma forma análoga, é esperado que as exportações brasileiras cresçam. Portanto, Exportações ↑ e Importações ↓ impactando positivamente o PIB efetivo e o hiato do produto.

Interpretação: β_1 Mudança esperada no hiato do produto quando a taxa real de juros variar em 1 unidade, mantendo tudo constante, será de β_1.

β_2: Variação de 1% na taxa de câmbio acarreta em uma variação esperada de $\beta_2/100$ unidades no hiato do produto, mantendo tudo o mais constante.

b) $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1} \cdot X'y$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{vmatrix} 0,10 \\ 1,09 \\ 8,00 \end{vmatrix}$$

Sabemos que $Var(\hat{\beta} \mid X) = \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1}$.

Entretanto, como não conhecemos σ^2, devemos estimá-la

$$\hat{\sigma}^2 = MSR = \frac{SSR}{n-k-1}$$

Do enunciado temos que $R^2 = 0,3855$ e $SST = 13,5409$

Assim, temos que $SSR = 8,32$. $n = 68$ (1^o termo de $X'X$)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{8,32}{65} = \underline{0,128}.$$

A variância associada a cada estimativa é obtida multiplicando 0,128 por cada elemento da diagonal principal da matriz $(X'X)^{-1}$. O erro padrão da regressão é dado por $\sqrt{0,128} = 0,35777$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0}} = \sqrt{0,128 \; a_{11}} = \sqrt{0,128 \cdot 0,0203} \doteq 0,051$$

a_{11} é = 1^o elemento da diagonal principal de $(X'X)^{-1}$.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}} = \sqrt{0,128 \; 0,0583} = 0,086$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2}} = \sqrt{0,128 \cdot 0,1843} = 0,154.$$

Modelo na forma usual é dado por:

$$\hat{y}_i = \underset{(0,051)}{0,1} + \underset{(0,086)}{1,09\,r_i} + \underset{(0,164)}{8 \cdot \log(E_i)}$$

$n = 68 \quad R^2 = 0,3865 \quad \hat{\sigma} = 0,3578$

c) $\hat{\beta}_1$ diferente do esperado

$\hat{\beta}_2$ OK!

Uma explicação econômica para a discordância do sinal de $\hat{\beta}_1$ com o esperado pode ser dada com base em um modelo de escolha intertemporal de consumo, que diz que se os indivíduos forem poupadores, um aumento na taxa real de juros pode levar a um aumento do consumo presente, aumentando o hiato do produto

Do ponto de vista econométrico, tal explicação deriva do fato de podermos ter omitido variáveis relevantes para explicar o hiato do Produto, POR EXEMPLO!, o que pode levar a estimativos viesados, e por consequência, não confiáveis para explicar a variável de interesse

$\ell)$ $H_0: \beta_1 = 0$ Taxa real de juros não é relevante] p/ expl.
$H_A: \beta_1 \neq 0$ Taxa real de juros é relevante] o hiato do produ

Sob H_0

$$t_{obs} = \frac{\hat{\beta_1} - \beta_1^{\text{Sob } H_0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta_i}}} \sim t_{(n-k-1)}$$

$$t_{obs} = \frac{1,09}{0,086} = 12,67$$

Olhando a distribuição "t student" com 65 graus de liberdade e $\alpha = 5\%$, observamos um valor tcrítico $= 2$

$RC =]-\infty, -2[\cup]+2, +\infty[$ $t_{obs} \in RC$

Há evidências p/ rejeitar H_0. HÁ EVIDÊNCIAS QUE r_i seja relevante

$H_0: \beta_2 = 0$ Taxa de câmbio não é relevante] p/ explicar o
$H_A: \beta_2 \neq 0$ Taxa de câmbio é relevante] hiato do produto

Sob H_0

$$t_{obs} = \frac{8}{0,154} = 52$$

$t_{crítico} = 2$ $RC =]-\infty, -2[\cup]+2, +\infty[$

$t_{obs} \in RC$. Há evidências para rejeitar H_0.

Há evidências que a taxa de câmbio seja relevante p/ explicar o hiato do produto.

4. $\underset{\sim}{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\underset{\sim}{B} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\det(\underset{\sim}{A}) = (1 \cdot 1) - (3 \cdot 2) = -5$

b) $\det(\underset{\sim}{B}) = (2 \cdot 5 \cdot 2) + (4 \cdot 5 \cdot 6) + (4 \cdot 1 \cdot 1) -$
$(6 \cdot 5 \cdot 4) - (1 \cdot 5 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot 4) = 6$

c) $\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & -0{,}2 \end{vmatrix}$

d) $\underset{\sim}{B}^{-1} = \begin{vmatrix} 0{,}83 & -0{,}67 & 0 \\ 4{,}67 & -3{,}33 & -1 \\ -4{,}83 & 3{,}67 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\underset{\sim}{B}$. particionada $\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ \hline 6 & 1 & 2 \end{array}\right|$ $\underset{\sim}{B}_{11}$ da matriz $\underset{\sim}{B}$ particionada será: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

Sua inversa será $= \begin{vmatrix} 0{,}83 & -0{,}67 \\ -0{,}17 & 0{,}33 \end{vmatrix}$