

Equações Simultâneas

Aula 16

Gujarati, 2011 – Capítulos 18 a 20

Wooldridge, 2011 – Capítulo 16

Introdução

Durante boa parte do desenvolvimento dos conteúdos desta disciplina, nós nos preocupamos apenas com modelos de regressão com uma única equação, isto é, com modelos em que há uma única variável dependente e uma ou mais variáveis explicativas.

Nesses modelos, o destaque foi a estimação do valor médio da variável resposta (dependente), condicionado aos valores das variáveis explicativas (regressores).

Introdução

A relação de causa e efeito, nesses modelos, se existir, vai das variáveis explicativas para a variável resposta.

Porém, existem casos onde essa relação unidirecional não faz muito sentido.

Isso ocorre quando a variável resposta é determinada por um grupo de variáveis explicativas e algumas dessas (endógenas), por sua vez, são determinadas pela variável resposta.

Introdução

Ou seja, há uma **relação de mão dupla**, ou simultânea entre a **variável resposta e alguns regressores endógenos**, o que torna a distinção entre variáveis dependentes e independentes de valor duvidoso.

O melhor, então, é **agrupar um conjunto de variáveis que possam ser determinadas simultaneamente pelo conjunto restante de variáveis** – exatamente o que fazem os **modelos de equações simultâneas**.

Introdução

Assim, nos modelos de equações simultâneas há mais de uma equação – uma para cada variável endógena.

E diferentemente dos modelos de uma única equação, nos modelos de equações simultâneas não podemos deixar de estimar os parâmetros de uma equação (a identificada) sem levar em conta as informações proporcionadas pelas demais equações do sistema.

Exemplo 1

MODELO DE OFERTA E DEMANDA

É fato bem conhecido que o preço, P , de um bem e a quantidade, Q , vendida são determinados pela intersecção das curvas de demanda e oferta desse bem.

Para simplificar, vamos supor que as curvas de oferta e demanda sejam lineares e, ainda, acrescentando os choques aleatórios, u_1 e u_2 , podemos escrever as equações de oferta e demanda empíricas como:

Exemplo 1

MODELO DE OFERTA E DEMANDA

Função de demanda: $Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$

Função de oferta: $Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$

Condição de equilíbrio: $Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$

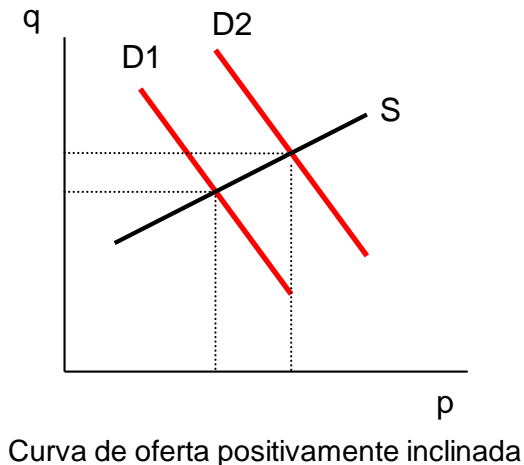
Exemplo 1

MODELO DE OFERTA E DEMANDA

Do *slide* anterior, podemos entender o seguinte:

Se a curva de oferta tiver inclinação positiva e o choque $u_{1,t}$, em (i), variar, em decorrência de alterações nas variáveis que afetam a quantidade demandada, a curva da demanda se deslocará para cima, se $u_{1,t}$ for positivo, ou para baixo, se $u_{1,t}$ for negativo.

Entretanto, como mostra a figura anterior, um deslocamento na curva de demanda provoca alterações tanto em Q_t quanto em P_t . Ou seja, $u_{1,t}$ e P_t , em (i), não podem ser consideradas independentes.



DEMONSTRAÇÃO (Exemplo 1)

Voltando às equações de interesse

$$\text{Função de demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$$

$$\text{Função de oferta: } Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$$

$$\text{Condição de equilíbrio: } Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$$

De (iii), vem que

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}}_{Q_t^d} = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}}_{Q_t^o}$$

DEMONSTRAÇÃO (Exemplo 1)

Isolando o preço, temos que

$$P_t = \underbrace{\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2}}_{\pi_1} + \underbrace{\frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}}_{v_1}$$

Assim, podemos calcular a covariância, por exemplo, entre P_t

e o choque u_{1t} :

$$\begin{aligned} Cov(P_t, u_{1t}) &= Cov\left(\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2} + \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}, u_{1t}\right) = \\ &= Cov\left(\frac{u_{2t}}{\alpha_2 - \beta_2} - \frac{u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}, u_{1t}\right) = \\ &= -\frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} Cov(u_{1t}, u_{1t}) = -\frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} Var(u_{1t}) \neq 0 \end{aligned}$$

Simultaneidade

Simultaneidade: uma ou mais variáveis explicativas são determinadas conjuntamente com a variável dependente. Desta maneira, existe dependência entre variáveis explicativas e o termo de erro aleatório.

Exemplo clássico: oferta e demanda por um produto ou fator de produção.

Quando há simultaneidade, o método dos mínimos quadrados gera estimadores viesados e inconsistentes.

Exemplo 2

Wooldridge (2012), supõe que *salário* e consumo de bebidas alcoólicas (*alcohol*) sejam determinados pelo seguinte modelo de equações simultâneas:

$$\log(\textit{salario}) = \beta_0 + \beta_1 \textit{alcohol} + \beta_2 \textit{educ} + u_1$$

$$\textit{alcohol} = \gamma_0 + \gamma_1 \log(\textit{salario}) + \gamma_2 \textit{educ} + \gamma_3 \log(\textit{preço}) + u_2$$

em que

preço – denota o índice de preço local do álcool, que inclui os impostos locais e estaduais;

educ – tempo de escolaridade (em anos).

Exemplo 3

Romer (1993), discute, a partir da construção de diversos modelos teóricos, que países mais “abertos” devem ter taxas de inflação mais baixas. Basicamente o autor tem o seguinte sistema de equações em mente:

$$\pi = \beta_0 + \beta_1 abertura + \beta_2 \log(rendapc) + u_1$$

$$abertura = \gamma_0 + \gamma_1 \pi + \gamma_2 \log(rendapc) + \gamma_3 area + u_2$$

em que

π – taxa de inflação;

$rendapc$ – renda per capita de 1980, em dólares;

$abertura$ – participação média das importações no PIB;

$área$ – área do país (em milhas quadradas).

Identificação de Uma Equação Estrutural

Problema de identificação

Por problema de identificação entendemos a possibilidade de recuperar, ou não, os parâmetros de uma equação estrutural (aquela que retrata a estrutura de uma economia ou o comportamento de um agente econômico) a partir dos coeficientes estimados na forma reduzida.

Identificação de Uma Equação Estrutural

Forma Reduzida

Uma equação na forma reduzida é aquela que expressa uma variável endógena apenas em termos das variáveis exógenas e dos termos de erros estocásticos.

Identificação de Uma Equação Estrutural

Problema de identificação (cont.)

- Se a recuperação dos parâmetros estruturais puder ser feita, com base nos parâmetros da forma reduzida, então dizemos que a equação estrutural em pauta é identificada.
- Caso a recuperação não possa ser concretizada, então a equação estrutural em pauta é dita não identificada (ou subidentificada).

Identificação de Uma Equação Estrutural

Problema de identificação (cont.)

Quando identificada, uma equação estrutural pode ser **exatamente identificada** (quando é possível obter valores exatos dos parâmetros estruturais) ou **superidentificada** (quando mais de um valor numérico puder ser obtido para alguns dos parâmetros estruturais).

Voltando ao Exemplo 1

Considerando o seguinte modelo de equações simultâneas:

$$\text{Função de demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$$

$$\text{Função de oferta: } Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$$

$$\text{Condição de equilíbrio: } Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$$

A equação (i) está identificada? E a equação (ii)? Justifique adequadamente as suas respostas.

Solução

Via (iii), podemos obter

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}}_{Q_t^d} = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}}_{Q_t^o}$$

E isolando o preço, temos

$$P_t = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\underbrace{\alpha_2 - \beta_2}_{\pi_1}} + \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\underbrace{\alpha_2 - \beta_2}_{\nu_1}}$$

(forma reduzida para o preço)

Solução

Analogamente, podemos encontrar a forma reduzida para Q_t da seguinte maneira:

(a) isolando o preço em (i);

(b) substituindo o resultado encontrado em (a) em (ii).

Do exposto, temos que

$$Q_t = \underbrace{\frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2}}_{\pi_2} + \underbrace{\frac{\alpha_2 u_{2t} - \beta_2 u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}}_{v_2}$$

(forma reduzida para a quantidade)

Solução

Nos *slides* anteriores encontramos a forma reduzida para o preço, dada por:

$$P_t = \pi_1 + v_1 \quad (\text{R1})$$

em que

$$\pi_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \text{e} \quad v_1 = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

Note que o parâmetro pode ser estimado por MQO, dada a definição de forma reduzida.

Solução

Também, encontramos a forma reduzida para a quantidade, dada por:

$$Q_t = \pi_2 + v_2 \quad (\text{R2})$$

em que

$$\pi_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\alpha_2 u_{2t} - \beta_2 u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

Note que o parâmetro pode ser estimado por MQO, dada a definição de forma reduzida.

Solução

As equações (R1) e (R2) são equações na forma reduzida para o preço e para a quantidade, respectivamente.

Nelas, além de ser possível observar que existem apenas dois parâmetros envolvidos também é possível notar que tais parâmetros podem ser estimados por MQO, dada a definição de forma reduzida.

Ainda, é possível observar que tais parâmetros das formas reduzidas são combinações dos parâmetros estruturais.

Solução

Ou seja, poderíamos tentar, de forma indireta, através da estimação dos parâmetros da forma reduzida, por MQO, recuperar os parâmetros estruturais.

Tal metodologia recebe o nome de **mínimos quadrados indiretos (MQI)**.

Todavia, no caso em estudo, não é difícil perceber que **é impossível recuperar todos os parâmetros estruturais**, de forma indireta, de qualquer uma das duas equações estruturais. Dessa forma, pela definição de identificação, ambas as **equações estruturais** no sistema são ditas **subidentificadas**.

Métodos de Identificação

Condição de Classificação

Definição. A primeira equação em um modelo de equações simultâneas com duas equações será identificada se, e somente se, a segunda equação contiver ao menos uma variável exógena (com coeficiente diferente de zero) que esteja excluída da primeira equação.

Nota: A identificação da segunda equação é, naturalmente, apenas a imagem espelhada da declaração para a primeira equação.

Voltando ao Exemplo 1

Considerando o seguinte modelo de equações simultâneas:

$$\text{Função de demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$$

$$\text{Função de oferta: } Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$$

$$\text{Condição de equilíbrio: } Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$$

alguma das equações do sistema pode ser considerada identificada, usando a condição de classificação?

Voltando ao Exemplo 3

Assumindo que *rendapc* e *área* sejam exógenas no modelo de equações simultâneas

$$\pi = \beta_0 + \beta_1 abertura + \beta_2 \log(rendapc) + u_1$$

$$abertura = \gamma_0 + \gamma_1 \pi + \gamma_2 \log(rendapc) + \gamma_3 area + u_2$$

em que

π – taxa de inflação;

rendapc – renda per capita de 1980, em dólares;

abertura – participação média das importações no PIB;

área – área do país (em milhas quadradas).

alguma das equações do sistema pode ser considerada identificada, usando a condição de classificação?

Métodos de Identificação

Condição de Ordem

Inicialmente vamos definir as seguintes quantidades:

M – número de variáveis endógenas no modelo;

m – número de variáveis endógenas em uma dada equação;

K – número de variáveis exógenas no modelo, incluindo o intercepto;

k – número de variáveis exógenas em uma dada equação (incluindo o intercepto, caso apareça na equação em pauta).

Métodos de Identificação

Condição de Ordem

Definição. Em um modelo com M equações simultâneas, para que uma equação seja identificada, o número de variáveis exógenas excluídas da equação de interesse não deve ser menor que o número de variáveis endógenas incluídas nessa equação menos 1.

Isto é,

$$K - k \geq m - 1.$$

Métodos de Identificação

Condição de Ordem

Dessa forma,

- ✓ Se $K - k < m - 1$, a equação é subidentificada;
- ✓ Se $K - k = m - 1$, a equação é exatamente identificada;
- ✓ Se $K - k > m - 1$, a equação é superidentificada.

Voltando ao Exemplo 3

Assumindo que *rendapc* e *área* sejam exógenas no modelo de equações simultâneas

$$\pi = \beta_0 + \beta_1 abertura + \beta_2 \log(rendapc) + u_1$$

$$abertura = \gamma_0 + \gamma_1 \pi + \gamma_2 \log(rendapc) + \gamma_3 area + u_2$$

em que

π – taxa de inflação;

rendapc – renda per capita de 1980, em dólares;

abertura – participação média das importações no PIB;

área – área do país (em milhas quadradas).

alguma das equações do sistema pode ser considerada identificada, usando a condição de ordem?

Observações

(Método de Identificação: Condição de Ordem)

Nota 1: Se a equação de interesse estiver exatamente identificada, então podemos recuperar os seus parâmetros estruturais via método dos mínimos quadrados indiretos. Ou seja, via estimação dos parâmetros da forma reduzida.

Nota 2: Se a equação de interesse estiver sobreidentificada, então o método dos mínimos quadrados indiretos gera resultados inconsistentes. Deveremos, nesse caso, então, usar o método dos mínimos quadrados em 2 estágios (2SLS), que será abordado em breve.

Nota 3: A condição de ordem é necessária para a identificação mas não é suficiente (a condição de posto é suficiente – para mais detalhes, vide Leitura Complementar).

Exemplo 4

Considere o modelo de equações simultâneas:

$$Q_i^D = \alpha_1 + \beta_1 P_i + u_{1i} \quad (\text{demanda})$$
$$Q_i^S = \alpha_2 + \beta_2 P_i + u_{2i} \quad (\text{oferta})$$
$$Q_i^D = Q_i^S$$

em que: Q_i^D é a quantidade demandada, Q_i^S é a quantidade ofertada, P_i é o preço, e u_{1i} e u_{2i} são termos aleatórios. É correto afirmar que:

- (0) o estimador de mínimos quadrados ordinários aplicado a cada uma das equações é consistente e não-tendencioso; **F**
- (1) no modelo acima a equação de demanda é identificada mas a equação de oferta não é; **F**
- (2) se a equação de demanda for definida por $Q_i^D = \alpha_1 + \beta_1 P_i + \gamma_1 Y_i + u_{1i}$, em que Y_i é a renda, a equação de oferta será identificada; **V**
- (3) a equação de demanda será identificada se for definida por $Q_i^D = \alpha_1 + \beta_1 P_i + \gamma_1 Y_i + u_{1i}$;
- (4) a variável renda, empregada nos dois itens anteriores, é uma “variável instrumental”

(3) F (4) V

Exercício

a) Um possível modelo para estimar os efeitos do hábito de fumar sobre a renda anual (talvez com os dias perdidos de trabalho devido à doenças ou aos efeitos sobre a produtividade) pode ser dado por

$$\log(\text{renda}) = \beta_0 + \beta_1 \text{cigs} + \beta_2 \text{educ} + \beta_3 \text{idade} + \beta_4 \text{idade}^2 + u_1$$

em que

cigs – número de cigarros fumados por dia, em média.

Levando em conta o sinal esperado, interprete o parâmetro associado à variável *cigs*?

Exercício (cont.)

b) Por outro lado, o consumo de cigarros pode ser determinado conjuntamente com a renda. Sendo este o caso, uma equação de demanda por cigarro pode ser dada por

$$\begin{aligned}cigs = & \gamma_0 + \gamma_1 \log(renda) + \gamma_2 educ + \gamma_3 idade + \gamma_4 idade^2 + \\ & + \gamma_5 \log(cigpric) + \gamma_6 restaurante + u_2\end{aligned}$$

em que

cigpric – é preço do pacote de cigarros;

restaurante – *dummy* que assume o valor 1 quando o indivíduo reside numa localidade onde os restaurantes tenham restrições quanto ao fumo.

Exercício (cont.)

- b) (cont.) Qual deve ser o sinal esperado para γ_5 e γ_6 ?
Justifique suas respostas.
- c) Encontre a forma reduzida para *cigs*.
- d) Estime os parâmetros do modelo proposto em (c). Para tanto, utilize os dados disponíveis na base *smoke1.wf1*.
Ainda, as variáveis *log(cigpric)* e *restaurante* são relevantes?
- e) A equação de renda está identificada?

EXERCÍCIOS EXTRAS

Exercício 1

Suponha o seguinte modelo de oferta e demanda:

$$q^{(d)} = a_1 + b_1 p + c_1 y + u_1 \quad (1)$$

$$q^{(o)} = a_2 + b_2 p + u_2 \quad (2)$$

$$q^{(d)} = q^{(o)} \quad (3)$$

em que

q é quantidade, p é o preço, y é a renda e u_1 e u_2 são os choques de demanda e oferta, respectivamente.

Pergunta: as equações (1) e (2) são identificadas? Justifique.

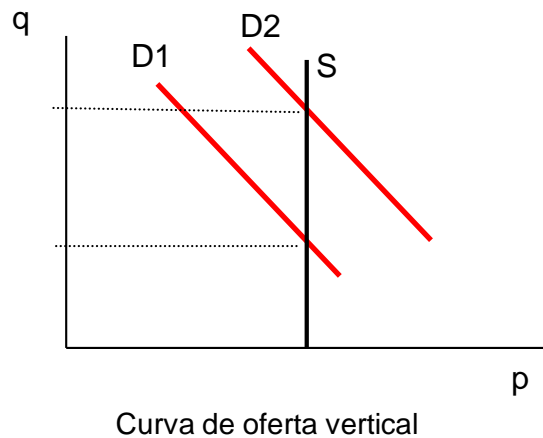
Exercício 2

Voltando ao Exercício 1, mostre detalhadamente como seria possível recuperar todos os parâmetros da equação exatamente identificada, via método dos mínimos quadrados indiretos. Ou seja, encontre as formas reduzidas para o preço e para a quantidade e utilize-as na busca dos parâmetros estruturais da equação exatamente identificada. Deixe bem claro o seu raciocínio.

Exercício 3

(Voltando ao EXEMPLO 1 – Modelo de Oferta e Demanda)

Suponha a seguinte situação, dada pela figura a seguir:

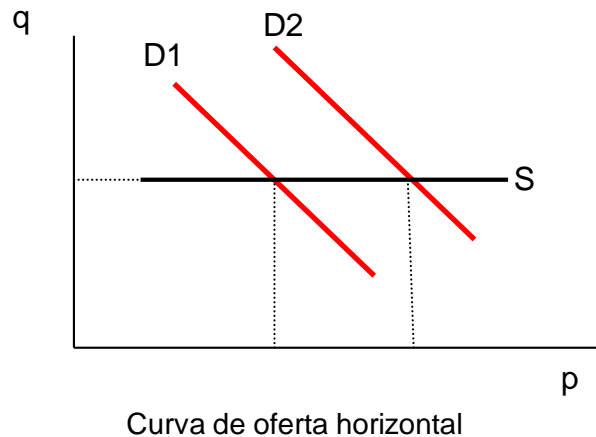


isto é, elasticidade preço infinita. Ainda, suponha que o choque u_{1t} , em (i), varie, em decorrência de alterações nas variáveis que afetam a quantidade demandada. Assim, o que pode ser dito sobre $\text{Cov}(u_{1t}, P_t)$? Justifique.

Exercício 4

(Voltando ao EXEMPLO 1 – Modelo de Oferta e Demanda)

Suponha a seguinte situação, dada pela figura a seguir:



isto é, quantidade completamente inelástica a preço. Ainda, suponha que o choque u_{1t} , em (i), varia, em decorrência de alterações nas variáveis que afetam a quantidade demandada. Assim, o que pode ser dito sobre $\text{Cov}(u_{1t}, P_t)$? Justifique.

Exercício 5

Wooldridge (2012), supõe que salário e o consumo de bebidas alcoólicas sejam determinados pelo seguinte modelo de equações simultâneas:

$$\log(\textit{salario}) = \beta_0 + \beta_1 \textit{alcool} + \beta_2 \textit{educ} + u_1$$

$$\textit{alcool} = \gamma_0 + \gamma_1 \log(\textit{salario}) + \gamma_2 \textit{educ} + \gamma_3 \log(\textit{preço}) + u_2$$

em que

preço – denota o índice de preço local do álcool, que inclui os impostos locais e estaduais;

educ – tempo de escolaridade (em anos).

Exercício 5 (cont.)

Pergunta-se:

- a) Wooldridge (2012), assume que as variáveis *educ* e *preço* são exógenas. Você concorda com essa suposição? Justifique a sua resposta.**
- b) Caso todos os parâmetros do sistema de equações anterior sejam diferentes de zero, qual equação está identificada? Justifique a sua resposta.**
- c) Você indicaria o uso do método dos mínimos quadrados indiretos para estimar os parâmetros estruturais desse sistema? Justifique a sua resposta.**

Exercício 6

Considere o seguinte sistema de equações hipotético

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{12}Y_{2i} + \gamma_{11}X_{1i} + u_{1i} \quad (\text{a})$$

$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21}Y_{1i} + \gamma_{21}X_{2i} + u_{2i} \quad (\text{b})$$

em que

Y_1 e Y_2 são variáveis mutuamente dependentes;

X_1 e X_2 são variáveis exógenas;

u_1 e u_2 são os termos de erro estocásticos.

Exercício 6 (cont.)

- i) Encontre a forma reduzida para Y_1 .
- ii) Calcule $\text{Cov}(Y_1, u_2)$ e comente.
- iii) Encontre a forma reduzida para Y_2 , calcule $\text{Cov}(Y_2, u_1)$ e comente.
- iv) Mostre detalhadamente como seria possível recuperar os parâmetros da(s) equação(ões) exatamente identificada(s), via método dos mínimos quadrados indiretos.

Exercício 7

Voltando ao Exemplo 3, encontre as formas reduzidas para a inflação e para a abertura. Ainda, utilize-as na busca dos parâmetros estruturais da equação exatamente identificada, deixando bem claro o seu raciocínio. Ou seja, mostre detalhadamente como seria possível recuperar todos os parâmetros da equação exatamente identificada, via método dos mínimos quadrados indiretos.

EXEMPLO RESOLVIDO

Exemplo Resolvido

É fato bem conhecido que o preço, P , de um bem e a quantidade, Q , vendida são determinados pela intersecção das curvas de demanda e oferta desse bem.

Assim, supondo que as curvas de oferta e demanda sejam lineares, para simplificar, e acrescentando os choques aleatórios, u_1 e u_2 , podemos escrever as equações de oferta e demanda empíricas como:

Exemplo Resolvido

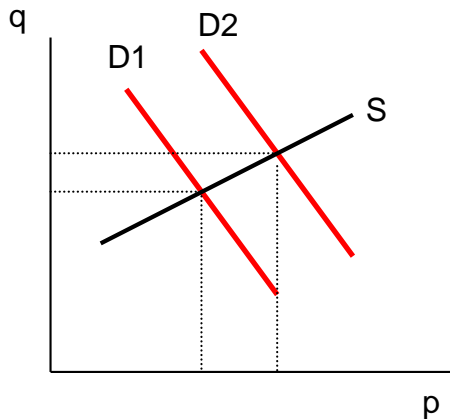
Função de demanda: $Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$

Função de oferta: $Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$

Condição de equilíbrio: $Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$

Exemplo Resolvido

Do *slide* anterior, podemos entender o seguinte:



Curva de oferta positivamente inclinada

Se a curva de oferta tiver inclinação positiva e o choque u_{1t} , em (i), variar, em decorrência de alterações nas variáveis que afetam a quantidade demandada, a curva da demanda se deslocará para cima, se u_{1t} for positivo, ou para baixo, se u_{1t} for negativo.

Entretanto, como mostra a figura anterior, um deslocamento na curva de demanda provoca alterações tanto em Q_t quanto em P_t . Ou seja, u_{1t} e P_t , em (i), não podem ser consideradas independentes.

Exemplo Resolvido

Igualando (i) e (ii), vem que

$$\alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t} = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}$$

E isolando o preço, temos

$$P_t = \underbrace{\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2}}_{\pi_1} + \underbrace{\frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}}_{v_1} \quad (\text{R1})$$

(forma reduzida para o preço)

Exemplo Resolvido

Assim, a partir de (R1), por exemplo, podemos calcular a covariância entre o P_t e o choque u_{1t} (conta análoga pode ser feita com o choque u_{2t}):

$$\begin{aligned} Cov(P_t, u_{1t}) &= Cov\left(\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2} + \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}, u_{1t}\right) = \\ &= Cov\left(\frac{u_{2t}}{\alpha_2 - \beta_2} - \frac{u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}, u_{1t}\right) = \\ &= -\frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} Cov(u_{1t}, u_{1t}) = -\frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} Var(u_{1t}) \neq 0 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido

Nos *slides* anteriores, encontramos a forma reduzida para o preço, dada por:

$$P_t = \pi_1 + v_1 \quad (\text{R1})$$

em que

$$\pi_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \text{e} \quad v_1 = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

Note que o parâmetro pode ser estimado por MQO, dada a definição de forma reduzida.

Exemplo Resolvido

Ainda, isolando o preço, em (i), e substituindo em (ii), obteremos a forma reduzida para a quantidade, dada por

$$Q_t = \pi_2 + v_2 \quad (\text{R2})$$

em que

$$\pi_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\alpha_2 u_{2t} - \beta_2 u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

Note que o parâmetro pode ser estimado por MQO, dada a definição de forma reduzida.

Exemplo Resolvido

As equações (R1) e (R2) são equações na forma reduzida para o preço e para a quantidade, respectivamente.

Nelas, além de ser possível observar que existem apenas dois parâmetros envolvidos também é possível notar que tais parâmetros podem ser estimados por MQO, dada a definição de forma reduzida.

Ainda, é possível observar que tais parâmetros das formas reduzidas são combinações dos parâmetros estruturais.

Exemplo Resolvido

Ou seja, poderíamos tentar, de forma indireta, através da estimação dos parâmetros da forma reduzida, por MQO, recuperar os parâmetros estruturais. Para tal metodologia dá-se o nome de **mínimos quadrados indiretos**.

Todavia, no caso em estudo, não é difícil perceber que **é impossível recuperar todos os parâmetros estruturais**, de forma indireta, de qualquer uma das duas equações estruturais.

Dessa forma, pela definição de identificação, ambas as **equações estruturais** no sistema são ditas **subidentificadas**.

Exemplo Resolvido

De acordo com a condição de classificação, alguma das equações, a seguir, encontra-se identificada?

$$\text{Função de demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$$

$$\text{Função de oferta: } Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$$

$$\text{Condição de equilíbrio: } Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$$

Não é difícil observar que as equações (i) e (ii) são não-identificadas, de acordo com a condição de classificação

Exemplo Resolvido

De acordo com a condição de ordem, alguma das equações, a seguir, encontra-se identificada?

$$\text{Função de demanda: } Q_t^d = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_2 < 0 \quad (i)$$

$$\text{Função de oferta: } Q_t^o = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t}, \quad \beta_2 > 0 \quad (ii)$$

$$\text{Condição de equilíbrio: } Q_t^d = Q_t^o \quad (iii)$$

Não é difícil observar que as equações (i) e (ii) são não-identificadas, de acordo com a condição de ordem

Exemplo Resolvido

Uma forma alternativa de ver o problema de identificação, descrito em Gujarati (2006, p. 596), é multiplicando a equação (i) por uma constante λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, e a equação (ii) por $1-\lambda$,

$$\lambda Q = \lambda \alpha_0 + \lambda \alpha_1 P_t + \lambda u_{1t}, \quad (\text{iii})$$

$$(1 - \lambda)Q = (1 - \lambda)\beta_0 + (1 - \lambda)\beta_1 P_t + (1 - \lambda)u_{2t}, \quad (\text{iv})$$

Exemplo Resolvido

Para, assim, somando as duas equações anteriores, obter a seguinte equação híbrida

$$Q = \underbrace{\lambda(\alpha_0 - \beta_0) + \beta_0}_{\gamma_0} + \underbrace{\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \beta_1}_{\gamma_1} P_t + \underbrace{\lambda(u_{1t} - u_{2t}) + u_{2t}}_{\xi_t}$$

que não pode ser distinguida nem de (i) nem de (ii). Ou seja, as equações (i) e (ii) não estão identificadas.

Exemplo Resolvido

Para que uma equação estrutural seja identificada, isto é, para que seus parâmetros sejam estimados de forma consistente, precisamos mostrar que essa equação não é similar à equação híbrida.

LEITURA COMPLEMENTAR

(MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS)

Gujarati, 2011 – Capítulos 18 a 20

Wooldridge, 2011 – Capítulo 16

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

O problema de identificação aparece quando procuramos uma resposta para a seguinte pergunta:

dados apenas informações relativas

às variáveis preço, P , e quantidade, Q ,

como sabemos se estamos estimando uma demanda ou uma de oferta?

Alternativamente, se pensamos que estamos ajustando uma função de demanda, como podemos garantir que estamos, de fato, estimando a função de demanda e não qualquer outra coisa? Dessa forma, uma resposta à pergunta anterior é necessária antes de estimarmos os parâmetros da nossa função demanda.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

Problema de identificação

Por problema de identificação entendemos a possibilidade de obter, ou não, os parâmetros de uma equação estrutural (aquela que retrata a estrutura de uma economia ou o comportamento de um agente econômico) a partir dos coeficientes estimados na forma reduzida.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

Forma Reduzida

Uma equação na forma reduzida é aquela que expressa uma variável endógena apenas em termos das variáveis exógenas e dos termos de erro estocásticos.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

Problema de identificação

Se a recuperação dos parâmetros estruturais puder ser feita, com base nos parâmetros da forma reduzida, então dizemos que a equação estrutural em pauta é identificada. Caso a recuperação não possa ser concretizada, então a equação estrutural em pauta é dita não identificada (ou subidentificada).

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

Problema de identificação

Quando identificada, uma equação estrutural pode ser **exatamente identificada** (quando é possível obter valores exatos dos parâmetros estruturais) ou **superidentificada** (quando mais de um valor numérico puder ser obtido para alguns dos parâmetros estruturais).

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

Problema de identificação

O problema de identificação surge pois uma dada equação na forma reduzida pode ser compatível com diferentes equações estruturais ou diferentes hipóteses (modelos), e, dessa forma, por exemplo, fica complicado dizer qual hipótese específica está sob investigação.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

MODELO DE OFERTA E DEMANDA

Função de demanda: $Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}, \quad \alpha_1 < 0 \quad (\text{i})$

Função de oferta: $Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}, \quad \beta_1 > 0 \quad (\text{ii})$

Condição de equilíbrio: $Q_t^d = Q_t^s \quad (\text{iii})$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

SUBIDENTIFICAÇÃO

Igualando (i) e (ii), vem que

$$\beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$$

E isolando o preço, temos

$$P_t = \underbrace{\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}}_{\pi_1} + \underbrace{\frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}}_{v_1} \quad (\text{R1})$$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

SUBIDENTIFICAÇÃO

Ainda, isolando o preço, em (i), e substituindo em (ii), vem que

$$Q_t = \underbrace{\frac{\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}}_{\pi_2} + \underbrace{\frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}}_{v_2} \quad (\text{R2})$$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

SUBIDENTIFICAÇÃO

As equações (R1) e (R2) são equações na forma reduzida. Entretanto, temos apenas dois parâmetros envolvidos nas formas reduzidas, enquanto que as equações estruturais envolvem quatro parâmetros. Ou seja, não há como recuperar os parâmetros estruturais, via formas reduzidas.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

SUBIDENTIFICAÇÃO

Uma forma alternativa de ver o problema de identificação, descrito em Gujarati (2006, p. 596), é multiplicando a equação (i) por uma constante λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, e a equação (ii) por $1-\lambda$,

$$\lambda Q = \lambda \alpha_0 + \lambda \alpha_1 P_t + \lambda u_{1t}, \quad (\text{iii})$$

$$(1 - \lambda)Q = (1 - \lambda)\beta_0 + (1 - \lambda)\beta_1 P_t + (1 - \lambda)u_{2t}, \quad (\text{iv})$$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

SUBIDENTIFICAÇÃO

Para, assim, somando as duas equações anteriores, obter a seguinte equação híbrida

$$Q = \underbrace{\lambda(\alpha_0 - \beta_0) + \beta_0}_{\gamma_0} + \underbrace{\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \beta_1 P_t}_{\gamma_1} + \underbrace{\lambda(u_{1t} - u_{2t}) + u_{2t}}_{\xi_t}$$

que não pode ser distinguida nem de (i) nem de (ii). Ou seja, as equações (i) e (ii) não estão identificadas.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Voltando ao Exemplo 1

SUBIDENTIFICAÇÃO

Para que uma equação estrutural seja identificada, isto é, para que seus parâmetros sejam estimados de forma consistente, precisamos mostrar que essa equação não é similar à equação híbrida.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo

IDENTIFICAÇÃO EXATA

Suponhamos o modelo de oferta e demanda (com duas equações estruturais):

$$q = a_1 + b_1p + c_1y + u_1 \quad (1)$$

$$q = a_2 + b_2p + c_2R + u_2 \quad (2)$$

em que q é quantidade, p é o preço, y é a renda, R é a chuva e u_1 e u_2 são os termos de erro.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo

IDENTIFICAÇÃO EXATA

As variáveis p e q são endógenas e as variáveis y e R são exógenas.

Sendo assim, como as variáveis y e R são independentes dos erros, podemos estimar os parâmetros das regressões para p , e para q , em função de y e R , por MQO. Entretanto, os parâmetros de (1) e (2) não devem ser estimados por MQO.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo

IDENTIFICAÇÃO EXATA

O que faremos, então, é reescrever os parâmetros nas equações de oferta e demanda originais, a partir das regressões de p e q em função de y e R (formas reduzidas).

Este método é chamado de **mínimos quadrados indiretos**.

Observação: O método de mínimos quadrados indiretos nem sempre funciona. Vamos discutir, em breve, as condições para o seu funcionamento.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo

IDENTIFICAÇÃO EXATA

Fazendo o tratamento adequado nas equações (1) e (2) teremos:

$$q = \pi_1 + \pi_2 y + \pi_3 R + \varepsilon_1$$

$$p = \pi_4 + \pi_5 y + \pi_6 R + \varepsilon_2$$

Em que os π_i 's são funções dos parâmetros originais (ou estruturais) e são chamados parâmetros na forma reduzida. Obtemos os EMQ dos parâmetros na forma reduzida e depois escrevemos os parâmetros estruturais em função dos parâmetros na forma reduzida.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Observação

Os estimadores dos coeficientes na forma reduzida são consistentes e, sob premissas adequadas, também são assintoticamente eficientes.

Ainda, é possível demonstrar que os estimadores indiretos dos parâmetros estruturais herdam todas as propriedades assintóticas dos estimadores na forma reduzida.

Entretanto, propriedades como ausência de viés, em geral, não são válidas (GUJARATI, 2006, APÊNDICE 20A).

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

IDENTIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

Condição básica de identificação: cada variável explicativa é não correlacionada com o termo erro da equação estrutural.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

1) Condição de ordem:

Definição. Em um modelo de M equações simultâneas, para que uma equação seja identificada, o número de variáveis predeterminadas excluídas da equação não deve ser menor que o número de variáveis endógenas incluídas nessa equação menos 1.

Isto é,

$$K - k \geq m - 1$$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

1) Condição de ordem (cont.):

em que

M – número de variáveis endógenas no modelo;

m – número de variáveis endógenas em uma dada equação;

K – número de variáveis predeterminadas no modelo, incluindo o intercepto;

k – número de variáveis predeterminadas em uma dada equação.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

1) Condição de ordem (cont.):

Assim,

- ✓ Se $K - k = m - 1$, a equação é exatamente identificada
- ✓ Se $K - k > m - 1$, a equação é superidentificada;

Observação: A condição de ordem é necessária para a identificação mas não é suficiente. Isto é, mesmo que atendida, pode acontecer que uma equação não seja identificada.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

Exemplo

Função Demanda: $Q = \alpha_0 + \alpha_1 P + u_1$

Função Oferta: $Q = \beta_0 + \beta_1 P + u_2$

em que

Q e P são variáveis endógenas;

Aplicando a condição de ordem, vemos que nem a função demanda e nem a função oferta estão identificadas.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

Exemplo

Função Demanda: $Q = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 I + u_1$

Função Oferta: $Q = \beta_0 + \beta_1 P + u_2$

em que

Q e P são variáveis endógenas;

I é uma variável exógena.

Aplicando a condição de ordem, vemos que a função demanda não está identificada. Por outro lado, a função oferta está exatamente identificada.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

2) Condição de posto:

Definição. Em um modelo contendo M equações com M variáveis endógenas, uma equação é identificada se, e somente se, pelo menos um determinante diferente de zero, de ordem $(M-1) \times (M-1)$, puder ser construído a partir dos coeficientes das variáveis (tanto endógenas quanto predeterminadas) excluídas da equação em pauta, mas incluídas nas outras equações do modelo.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo

Considere o seguinte sistema de equações simultâneas em que as variáveis y são endógenas e as variáveis x são exógenas:

$$\begin{aligned} Y_{1i} - \beta_{10} - \beta_{12}Y_{2i} - \beta_{13}Y_{3i} - \gamma_{11}X_{1i} &= u_{1i} \\ Y_{2i} - \beta_{20} - \beta_{23}Y_{3i} - \gamma_{21}X_{1i} - \gamma_{22}X_{2i} &= u_{2i} \\ Y_{3i} - \beta_{30} - \beta_{31}Y_{1i} - \gamma_{31}X_{1i} - \gamma_{32}X_{2i} &= u_{3i} \\ Y_{4i} - \beta_{40} - \beta_{41}Y_{1i} - \beta_{42}Y_{2i} - \gamma_{43}X_{3i} &= u_{4i} \end{aligned}$$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Métodos de identificação

2) Condição de posto:

- a) Excluir a linha particular;
- b) Pegue as colunas correspondentes aos elementos que têm zeros naquela linha;
- c) Se desse conjunto de colunas pudermos encontrar $(M-1)$ linhas e colunas que não sejam todas zero, onde M é o número de var. endógenas, e nenhuma coluna (ou linha) for proporcional a outra coluna (ou linha) para todos os valores dos parâmetros, então a equação é identificada.

Observação: A condição de posto é necessária e suficiente para a identificação.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo (cont.)

Vamos escrever o sistema de acordo com o quadro a seguir:

	Coeficientes das variáveis							
Equação	c	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
(1)	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
(2)	$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
(3)	$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
(4)	$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exemplo (cont.)

Podemos observar, por exemplo, que a primeira equação não é identificada, pois o determinante da matriz, que nesse caso é única, gerada pelas colunas de interesse resultou no valor zero.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exercício

Utilizando o sistema proposto no Exemplo 6, aplique a condição de ordem para verificar a identificação das equações do sistema. Compare com os resultados obtidos pela condição de posto.

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Exercício

Equação	$K - k$	$m - 1$	Identificada?
(1)	2	2	Exatamente
(2)	1	1	Exatamente
(3)	1	1	Exatamente
(4)	2	2	Exatamente

MODELOS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

- É possível encontrar estimativas quando a condição de posto não é válida, mas estas estimativas são desprovidas de sentido.
- Não é sempre verdade que não podemos dizer nada sobre os parâmetros de uma equação não-identificada. Em alguns casos, os estimadores de MQO nos dão alguma informação sobre os parâmetros, mesmo se eles não forem consistentes.
- Há alguns casos em que o modelo de equações simultâneas pode ser estimado utilizando MQO. Um exemplo disso é o modelo recursivo. Ver seção 9.9 do Maddala.

Exercício 1

São corretas as afirmativas. Em modelos de equações simultâneas:

(0) o problema da identificação precede o da estimação.

(1) se a condição de ordem for satisfeita, a condição de posto também será satisfeita.

(2) os estimadores de mínimos quadrados indiretos e os de mínimos quadrados de dois estágios são não-tendenciosos e consistentes.

(3) se uma equação é exatamente identificada, os métodos de mínimos quadrados indiretos e de dois estágios produzem resultados idênticos.

(4) o método de mínimos quadrados indiretos pode ser aplicado tanto a equações exatamente identificados quanto a equações superidentificadas.

(0) V (1) F (2) F (3) V (4) F

Exercício 2

Equação de Demanda:

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 R_t + u_{1t}$$

Equação de oferta:

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t}$$

em que no período t , Q_t é a quantidade de produto; P_t , o preço (endógeno) do produto; R_t , a renda do consumidor; u_{1t} , o distúrbio aleatório da equação de demanda e u_{2t} , o distúrbio aleatório da equação de oferta. A partir destas equações são obtidas as equações na forma reduzida: $P_t = \pi_0 + \pi_1 R_t + \pi_2 P_{t-1} + v_{1t}$ e $Q_t = \pi_3 + \pi_4 R_t + \pi_5 P_{t-1} + w_t$.

(0) Assim sendo, $\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}$, $\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$ e $\pi_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$.

(1) A condição de posto indica que a primeira e a segunda equações são identificadas.

(2) Se multiplicarmos a equação de demanda por λ ($0 < \lambda < 1$) e a equação de oferta por $(1 - \lambda)$ e somá-las, desde que o resultado dessa soma seja diferente da equação de oferta e da equação de demanda, as duas serão identificadas.

(3) O método de mínimos quadrados ordinários produz estimadores consistentes e eficientes dos parâmetros da forma estrutural.

(4) Para verificar se qualquer equação do sistema é identificável, basta aplicar a condição de ordem.

(0) F (1) V (2) V (3) F (4) F