Análise de Regressão Linear Múltipla IX

Aula 12

Gujarati e Porter - Capítulo 8

Wooldridge - Capítulo 5

Heij *et al.*, 2004 – Seção 4.2.4

Introdução

Ao longo dos próximos *slides* nós discutiremos uma alternativa para **testar um conjunto de restrições nos parâmetros que precisa apenas dos resultados obtidos sob o modelo restrito**.

Este **teste é baseado no método de Lagrange** para minimização sob restrições.

Teste LM

(Teste do Multiplicador de Lagrange)

Considere o seguinte modelo de regressão linear múltipla:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

que pode ser escrito na forma linear geral

$$\underset{\sim}{\mathbf{y}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Ainda, considere a hipótese linear geral:

$$H_o : \underset{\sim}{\mathbf{R}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\sim}{\mathbf{r}} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\mathbf{R}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} - \underset{\sim}{\mathbf{r}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$H_A : \underset{\sim}{\mathbf{R}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} \neq \underset{\sim}{\mathbf{r}}$$

Teste LM

O *método de Lagrange* afirma que as estimativas de mínimos quadrados, sob H_0, podem ser obtidas minimizando a seguinte função de Lagrange

$$\boxed{\Lambda\left(\underset{\sim}{\beta},\ \underset{\sim}{\lambda}\right)=S\left(\underset{\sim}{\beta}\right)+2\underset{\sim}{\lambda}'\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{r}\right)=\left(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta}\right)'\left(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta}\right)+2\underset{\sim}{\lambda}'\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{r}\right)}$$

Teste LM

Assim, as condições de primeira ordem são dadas por:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = -2\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{y} + 2\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} + 2\underset{\sim}{R}'\underset{\sim}{\hat{\lambda}} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \underset{\sim}{\lambda}} = 2\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{r}\right) = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(b)}$$

Teste LM

Pré-multiplicando (a) por

$$\boxed{\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}}$$

e usando (b) em (a), vem que

$$\boxed{\underset{\sim}{\hat{\lambda}} = \left[\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{R}'\right]^{-1}\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{r}\right)}$$

(como podemos interpretar esse resultado?)

Teste LM

Não é difícil provar que:

$$\boxed{\hat{\underset{\sim}{\lambda}} \sim N_g\left(\underset{\sim}{0}\ ;\ \sigma^2\left[\underset{\sim}{\mathbf{R}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{X}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}\right)^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{R}}'\right]^{-1}\right)}$$

Resultado

$$Se\quad \underset{\sim}{\mathbf{x}} \sim N_n\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\ ;\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}\right),\ \text{então}\left(\underset{\sim}{\mathbf{x}}-\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\right)'\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\left(\underset{\sim}{\mathbf{x}}-\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\right) \sim \chi^2_{(n)}$$

Teste LM

Do resultado anterior, vem que

$$\boxed{LM = \underset{\sim}{\hat{\lambda}}'\left[\sigma^2\left[\underset{\sim}{\mathbf{R}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{X}}'\underset{\sim}{\mathbf{X}}\right)^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{R}}'\right]^{-1}\right]^{-1}\underset{\sim}{\hat{\lambda}} \sim \chi^2_{(g)}}$$

Ainda, podemos reescrever o resultado anterior como

$$\boxed{LM = \left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{r}\right)'\left[\sigma^2\,\underset{\sim}{\mathbf{R}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{X}}'\underset{\sim}{\mathbf{X}}\right)^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{R}}'\right]^{-1}\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{r}\right) \sim \chi^2_{(g)}}$$

Teste LM

Como σ^2 é desconhecido, o substituímos pelo seu estimador consistente que, nesse caso, é dado por

$$\boxed{\hat{\sigma}_R^2 = \frac{\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}_R{}'\,\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}_R}{n}}$$

em que,

$\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}_R$ - vetor de resíduos associado à estimação, por MQO, dos parâmetros do modelo restrito.

Teste LM

Dessa forma,

$$\boxed{LM = \frac{\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{r}\right)' \left[\underset{\sim}{\mathbf{R}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{X}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}\right)^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{R}}'\right]^{-1}\left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{r}\right)}{\hat{\sigma}_R^2} \sim \chi^2_{(g)}}$$

Greene (2008) mostra que o resultado anterior pode ser escrito como

$$\boxed{LM = \frac{\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}_{\mathrm{R}}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}\left(\underset{\sim}{\mathbf{X}}'\,\underset{\sim}{\mathbf{X}}\right)^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{X}}'\,\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}_{\mathrm{R}}}}{\hat{\sigma}_R^2} \sim \chi^2_{(g)}}$$

Teste LM

Ainda, Greene (2008) também afirma que o resultado anterior pode ser escrito como:

$$\boxed{LM = nR^2_{\hat{\varepsilon}_R} \sim \chi^2_{(g)}}$$

em que,

$R^2_{\hat{\varepsilon}_R}$ - coeficiente de determinação associado à estimação dos parâmetros do modelo cuja variável resposta é $\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}_R}$ em função das variáveis explicativas do modelo irrestrito .

Cálculo da Estatística LM

(via Eviews)

(i) Estime os parâmetros do modelo restrito;

(ii) Salve os resíduos do modelo restrito estimado em (i);

(iii) Regrida os resíduos obtidos em (ii) em função de todas as variáveis explicativas do modelo irrestrito;

(iv) Calcule $LM = n.R_{\hat{e}_R}^2$ [*n é o tamanho amostral utilizado no passo (iii)*];

(v) Compare o valor da estatística *LM* com um valor crítico da distribuição χ_g^2, *para um determinado nível de significância fixado*: se LM > χ_g^2, *rejeitamos a hipótese nula.*

Exemplo

No arquivo *HPRICE1.xls* estão dispostos dados sobre 88 residências.

Foram observadas as variáveis:

- ***price*** **– preço da residência, em milhares de dólares;**
- ***assess*** **– valor avaliado, em milhares de dólares;**
- ***bdrms*** **– número de dormitórios;**
- ***lotsize*** **– área do terreno, em pés^2;**
- ***sqrft*** **– área construída, em pés^2;**
- ***colonial*** **– (1 = casa no estilo colonial).**

Exemplo (cont.)

Utilizando os dados do arquivo anteriormente citado:

a) Estime os parâmetros do modelo

$$\log(price) = \beta_0 + \beta_1 \log(assess) + \beta_2 lotsize + \beta_3 sqrft + \beta_4 bdrms + \varepsilon$$

escreva os resultados na forma usual e interprete as estimativas dos parâmetros.

Exemplo (cont.)

Solução: item (a)

Dependent Variable: LOG(PRICE)
Method: Least Squares
Date: 09/27/13 Time: 08:55
Sample: 1 88
Included observations: 88

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.093445	0.630250	0.148266	0.8825
LOG(ASSESS)	0.947875	0.127176	7.453238	0.0000
LOTSIZE	1.78E-06	1.67E-06	1.069735	0.2878
SQRFT	1.19E-06	5.87E-05	0.020248	0.9839
BDRMS	0.028393	0.022267	1.275081	0.2058

R-squared	0.773722	Mean dependent var	5.633180
Adjusted R-squared	0.762817	S.D. dependent var	0.303573
S.E. of regression	0.147844	Akaike info criterion	-0.930175
Sum squared resid	1.814207	Schwarz criterion	-0.789417
Log likelihood	45.92770	Hannan-Quinn criter.	-0.873467
F-statistic	70.95139	Durbin-Watson stat	2.132166
Prob(F-statistic)	0.000000		

Exemplo (cont.)

Solução: item (a)

$$\widehat{\log(price)} = \underset{(0{,}630250)}{0{,}093445} + \underset{(0{,}127176)}{0{,}947875} \cdot assess + \underset{(1{,}67 \cdot 10^{-6})}{1{,}78 \cdot 10^{-6}}\, lotsize +$$

$$+ \underset{(5{,}87 \cdot 10^{-5})}{1{,}19 \cdot 10^{-6}}\, sqrft + \underset{(0{,}022267)}{0{,}028393}\, bdrms$$

$n = 88 \qquad R^2 = 0{,}773722 \qquad R_a^2 = 0{,}762817 \qquad \hat{\sigma} = 0{,}147844$

Exemplo (cont.)

b) Verifique, a partir da condução de um teste LM, com 5% de significância, se o modelo de regressão proposto em (a) é estatisticamente significante.

$$\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$\mathrm{H}_A : \text{pelo menos um parâmetro difere de zero}$$

Solução: item (b)

Dependent Variable: LOG(PRICE)
Method: Least Squares
Date: 04/21/12 Time: 10:53
Sample: 1 88
Included observations: 88
LOG(PRICE)=C(1)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	5.633180	0.032361	174.0733	0.0000

R-squared	0.000000	Mean dependent var	5.633180
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	0.303573
S.E. of regression	0.303573	Akaike info criterion	0.464907
Sum squared resid	8.017605	Schwarz criterion	0.493059
Log likelihood	-19.45592	Hannan-Quinn criter.	0.476249
Durbin-Watson stat	1.790788		

Estimação do modelo restrito

Solução: item (b)

Dependent Variable: RESID1R
Method: Least Squares
Date: 04/21/12 Time: 10:55
Sample: 1 88
Included observations: 88
RESID1R=C(1)+C(2)*LOG(ASSESS)+C(3)*LOTSIZE+C(4)*SQRFT
+C(5)*BDRMS

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-5.539735	0.630250	-8.789749	0.0000
C(2)	0.947875	0.127176	7.453238	0.0000
C(3)	1.78E-06	1.67E-06	1.069735	0.2878
C(4)	1.19E-06	5.87E-05	0.020248	0.9839
C(5)	0.028393	0.022267	1.275081	0.2058

R-squared	0.773722	Mean dependent var	-8.24E-16
Adjusted R-squared	0.762817	S.D. dependent var	0.303573
S.E. of regression	0.147844	Akaike info criterion	-0.930175
Sum squared resid	1.814207	Schwarz criterion	-0.789417
Log likelihood	45.92770	Hannan-Quinn criter.	-0.873467
F-statistic	70.95139	Durbin-Watson stat	2.132166
Prob(F-statistic)	0.000000		

Regressão dos resíduos do modelo restrito em função de todas as variáveis explicativas

Solução: item (b)

LM = 88* 0,773722 = 68,08754

χ^2(0,05; 4) = @qchisq(0.95, 4) = 9,48

p-valor < 0,001

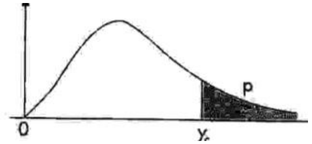
Exercício

c) Conduza um teste LM que seja capaz de verificar a validade das seguintes hipóteses de interesse:

$$\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 1$$
$$\mathrm{H}_A : \beta_1 \neq 1$$

Ainda, em termos do problema, qual o significado prático do resultado obtido?

Tabela Qui-quadrado



	Probabilidade (p)													
gl	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.64	1.07	0.71	0.45	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
2	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	3.22	2.41	1.83	1.39	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01
3	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.64	3.66	2.95	2.37	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07
4	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.99	4.88	4.04	3.36	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21
5	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	7.29	6.06	5.13	4.35	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41
6	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	8.56	7.23	6.21	5.35	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68
7	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.80	8.38	7.28	6.35	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99
8	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	11.03	9.52	8.35	7.34	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	12.24	10.66	9.41	8.34	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	13.44	11.78	10.47	9.34	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.76	24.73	21.92	19.68	17.28	14.63	12.90	11.53	10.34	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	15.81	14.01	12.58	11.34	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	16.98	15.12	13.64	12.34	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	18.15	16.22	14.69	13.34	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	19.31	17.32	15.73	14.34	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	20.47	18.42	16.78	15.34	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	21.61	19.51	17.82	16.34	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	22.76	20.60	18.87	17.34	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	23.90	21.69	19.91	18.34	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84
20	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	25.04	22.77	20.95	19.34	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43
21	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	26.17	23.86	21.99	20.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03
22	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	27.30	24.94	23.03	21.34	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64
23	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	28.43	26.02	24.07	22.34	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26
24	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	29.55	27.10	25.11	23.34	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89
25	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	30.68	28.17	26.14	24.34	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52
26	48.29	45.64	41.92	38.89	35.56	31.79	29.25	27.18	25.34	17.29	15.38	13.84	12.20	11.16
27	49.65	46.96	43.19	40.11	36.74	32.91	30.32	28.21	26.34	18.11	16.15	14.57	12.88	11.81
28	50.99	48.28	44.46	41.34	37.92	34.03	31.39	29.25	27.34	18.94	16.93	15.31	13.56	12.46
29	52.34	49.59	45.72	42.56	39.09	35.14	32.46	30.28	28.34	19.77	17.71	16.05	14.26	13.12
30	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	36.25	33.53	31.32	29.34	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79