Análise de Regressão Linear Múltipla VIII

Aula 11

Wooldridge - Capítulo 5

Heij *et al.*, 2004 – Seções 1.3.3 e 4.1

Introdução

- Nós já vimos que é possível derivar as distribuições exatas dos estimadores e das estatísticas de testes, sob certas suposições.

- Porém, tais suposições são bastante fortes; assim, na prática, é difícil de encontrar um caso onde todas elas sejam válidas.

- Por exemplo, é comum a suposição de normalidade multivariada do vetor de erros ser violada.

Introdução

- Dessa forma, se uma ou várias das suposições (de 1 a 6) forem violadas, então não teremos mais a validade de algumas (ou todas) propriedades dos estimadores e das estatísticas de testes.

- Logo, seria bastante útil se conseguíssemos entender as propriedades dos estimadores e a convergência das estatísticas de testes, no caso em que pudéssemos obter um número ilimitado de observações.

Introdução

- Isto é o que, essencialmente, denotamos como ***teoria assintótica***.

- Sabemos que, na prática, trabalhamos com amostras finitas. Porém, será que não seria possível admitir como verdadeiras as propriedades assintóticas no caso de amostras suficientemente grandes?

Consistência

do Vetor de Estimadores de MQO

Wooldridge - Capítulo 5

Heij *et al.*, 2004 – Seção 4.1

Consistência do vetor de estimadores de MQO

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)=\operatorname{plim}\left(\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{y}\right)=\operatorname{plim}\left(\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\left(\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta}+\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\right)=\operatorname{plim}\left(\underset{\sim}{\beta}+\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$$

$$=\operatorname{plim}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)+\operatorname{plim}\left(\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=\underset{\sim}{\beta}+\operatorname{plim}\left(\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\underset{\sim}{\beta}+\operatorname{plim}\left(n\left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=\underset{\sim}{\beta}+\operatorname{plim}\left(\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\right)=$$

$$=\underset{\sim}{\beta}+\operatorname{plim}\left(\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\right)\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=\underset{\sim}{\beta}+\left(\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)\right)^{-1}\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=$$

(façamos um breve parênteses...)

Suposição Adicional

MLR.3* - Estabilidade dos Regressores. Na amostra (e, portanto, na população) nenhum regressor é constante, <u>não</u> há relação linear <u>PERFEITA</u> entre os regressores e a probabilidade limite de $n^{-1}X'X$ existe e é não-singular, isto é, $\text{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)=\underset{\sim}{Q}.$

(Para mais detalhes, vide Leitura Complementar I)

Consistência do vetor de estimadores de MQO

(cont.)

Dos *slides* anteriores, vem que

$$\text{plim}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right) = \underset{\sim}{\beta} + \left(\text{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{Q}^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$$

Ainda, é fácil notar que o vetor de estimadores será consistente se, e somente se,

$$\text{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \underset{\sim}{0}.$$

(Condição de ortogonalidade)

Normalidade Assintótica

Wooldridge - Capítulo 5

Heij *et al.*, 2004 – Seção 4.1

Normalidade Assintótica do vetor de estimadores de MQO

Para determinar a distribuição assintótica do vetor de estimadores do vetor de parâmetros **β**, é interessante utilizarmos a seguinte expressão:

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{y} = \left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\left(\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta}+\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \underset{\sim}{\beta} + \left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}$$

Ou seja,

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{\beta} = \left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon}$$

Normalidade Assintótica do vetor de estimadores de MQO

Por outro lado, o resultado anterior pode ser escrito como

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{\beta} = \left(\frac{1}{n} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{X} \right)^{-1} \frac{1}{n} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\varepsilon}$$

Ou, ainda

$$\sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{\beta} \right) = \left(\frac{1}{n} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{X} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\varepsilon}$$

Normalidade Assintótica do vetor de estimadores de MQO

Sob a suposição MLR.3*, o fator $\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)^{-1}$ converge, em probabilidade, para a matriz **Q^{-1}**.

Por outro lado, sob as suposições MLR.1 a MLR.5, além de algumas condições de regularidade, prova-se que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{\varepsilon} \xrightarrow{d} N_{k+1}\left(\underset{\sim}{0}\ ;\ \sigma^{2}\underset{\sim}{Q}\right)$$

(Resultado baseado numa generalização do TLC (p. 50-51, HEIJ *et al*.)

Normalidade Assintótica do vetor de estimadores de MQO

Dessa forma, assumindo que as suposições anteriores são válidas, temos que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right) \xrightarrow{d} N_{k+1}\left(\underset{\sim}{0}\ ;\ \sigma^2\, \underset{\sim}{Q}^{-1}\right)$$

LEITURA COMPLEMENTAR I

(MLR.3*)

Considere o seguinte modelo de regressão linear múltipla:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$\underset{\sim}{\mathbf{y}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

em que

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \ldots & x_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz X'X é escrita como

$$\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} (x_{1i}x_{2i}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} (x_{1i}x_{ki}) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (x_{2i}x_{1i}) & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} (x_{2i}x_{ki}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} (x_{ki}x_{1i}) & \sum_{i=1}^{n} (x_{ki}x_{2i}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{pmatrix}$$

Ainda,

$$\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_k \\ \bar{x}_1 & \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2}{n} & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}x_{2i}\right)}{n} & \cdots & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}x_{ki}\right)}{n} \\ \bar{x}_2 & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{2i}x_{1i}\right)}{n} & \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2}{n} & \cdots & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{2i}x_{ki}\right)}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_k & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ki}x_{1i}\right)}{n} & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ki}x_{2i}\right)}{n} & \cdots & \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2}{n} \end{pmatrix}$$

Suposição MLR.3*

Usando o plim(·), vem que

$$\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)=\operatorname{plim}\begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_k \\ \bar{x}_1 & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}x_{2i}\right)}{n} & \cdots & \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}x_{ki}\right)}{n} \\ \bar{x}_2 & \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{2i}x_{1i}\right)}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2}{n} & \cdots & \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{2i}x_{ki}\right)}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_k & \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ki}x_{1i}\right)}{n} & \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ki}x_{2i}\right)}{n} & \cdots & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2}{n} \end{pmatrix}$$

Suposição MLR.3*

Logo,

$$p\lim\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)=\begin{pmatrix} 1 & p\lim(\bar{x}_1) & p\lim(\bar{x}_2) & \dots & p\lim(\bar{x}_k) \\ p\lim(\bar{x}_1) & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2}{n}\right) & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{2i})}{n}\right) & \dots & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{ki})}{n}\right) \\ p\lim(\bar{x}_2) & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}x_{1i})}{n}\right) & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2}{n}\right) & \dots & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}x_{ki})}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p\lim(\bar{x}_k) & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ki}x_{1i})}{n}\right) & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ki}x_{2i})}{n}\right) & \dots & p\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Suposição MLR.3*

Finalmente,

$$p\lim\left(\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)=\begin{pmatrix} 1 & \mu_{x_1} & \mu_{x_2} & \cdots & \mu_{x_k} \\ \mu_{x_1} & \sigma_{x_1}^2+\left(\mu_{x_1}\right)^2 & \sigma_{x_1x_2}+\mu_{x_1}\mu_{x_2} & \cdots & \sigma_{x_1x_k}+\mu_{x_1}\mu_{x_k} \\ \mu_{x_2} & \sigma_{x_2x_1}+\mu_{x_2}\mu_{x_1} & \sigma_{x_2}^2+\left(\mu_{x_2}\right)^2 & \cdots & \sigma_{x_2x_k}+\mu_{x_2}\mu_{x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x_k} & \sigma_{x_kx_1}+\mu_{x_k}\mu_{x_1} & \sigma_{x_kx_2}+\mu_{x_k}\mu_{x_2} & \cdots & \sigma_{x_k}^2+\left(\mu_{x_k}\right)^2 \end{pmatrix}=\underset{\sim}{Q}$$

em que

$$\mu_{x_j}=E\left(X_j\right),\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

$$\sigma_{x_j}^2=Var\left(X_j\right),\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

$$\sigma_{x_cx_l}=Cov\left(X_c,X_l\right),\ \mathrm{c}=1,\ 2,\ \ldots,\ k\,;\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ k\,;\ c\neq l$$

LEITURA COMPLEMENTAR II

(Revisão: Estatística II)

Heij *et al.*, 2004 – Seções 1.3.3 e 4.1

Consistência

Seja θ um parâmetro de interesse e considere $\hat{\theta}_n$ um estimador de θ. Nós estamos interessados nas propriedades deste estimador quando, teoricamente, $n \to \propto$, sob a suposição de que os dados foram gerados por um processo com parâmetro θ_0. O estimador será dito consistente se ele convergir em probabilidade para θ_0. Ou seja, se para todo $\varepsilon > 0$, a expressão

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \hat{\theta}_n - \theta_0 \right| < \varepsilon \right) = 1$$

for válida, então, teremos um estimador consistente para θ.

Consistência

Neste caso, θ_0 é chamado de limite de probabilidade de $\hat{\theta}_n$ e pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\text{plim}\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta_0$$

Consistência

Propriedades do plim

Suponha que y_n e z_n sejam duas seqüências de variáveis aleatórias com $\text{plim}(y_n) = c_1$ e $\text{plim}(z_n) = c_2$, então, podemos demonstrar que:

(1) $\text{plim}(y_n + z_n) = \text{plim}(y_n) + \text{plim}(z_n) = c_1 + c_2$;

(2) $\text{plim}(y_n z_n) = \text{plim}(y_n)\text{plim}(z_n) = c_1 c_2$;

(3) $\text{plim}(y_n / z_n) = \text{plim}(y_n) / \text{plim}(z_n) = c_1 / c_2$ ($c_2 \neq 0$).

Consistência

Propriedades do plim

Suponha que $g(\cdot)$ seja uma função contínua e que não dependa de n, assim,

(4) $\text{plim}(g(y_n)) = g(\text{plim}(y_n)) = g(c_1)$.

Este resultado implica que, se um estimador for consistente, então, qualquer função baseada nele também será consistente, mantidas as condições do enunciado.

Consistência

Propriedades do plim

Observações

1) Resultados similares podem ser obtidos para vetores e matrizes constituídos por variáveis aleatórias.

2) Para mais detalhes, vide, por exemplo, seção 1.3.3 de Heij *et al*. (2004).